Université Ibn Zohr
ENSA Agadir

27 Juillet 2005

Concours d'entrée en $1^{ère}$ année
Epreuve de mathématiques (durée 2 heures)

Répondre sur la feuille réponse.
Pour chaque question mettre une croix sur la case correspondante (vrai ou faux)
Barème : Réponse juste = 1 point **Réponse erronées = -1** **Pas de réponse 0**

Problème 1 : encadrement d'une intégrale

1 Soit la fonction $f(x) = \dfrac{e^{-(x+1)}}{1-x}$ définie sur $D_1 \cup D_2$ avec $D_1 =]-\infty, 1[$ et $D_2 =]1, +\infty[$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé. $(O, \vec{i}, \vec{j})$

A) Sur le domaine D_1, f admet un minimum en x=0 qui vaut 1/e et l'on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$

B) Sur le domaine D_2, f croit de $-\infty$ à 0

C) Les droites x=1 et y=0 sont des asymptotes de C_f

D) f admet une branche parabolique quand x tend vers $+\infty$

2 On pose $u_n = \int_{-1} t^n e^{-(t+1)} dt$

A) $u_0 = 1 - e^{-1}$ B) $u_0 = 1 + e^{-1}$ C) $u_0 = 1 - e$ D) $u_0 = 1 + e$

3
A) $u_{n+1} = (-1)^{n+1} + (n+1)u_n$
B) $u_{n+1} = (n+1)u_n$
C) $u_{n+1} = (-1)^n + (n)u_n$
D) $u_{n+1} = 1 + (n+1)u_n$

4
A) $u_1 = -1/e$
B) $u_2 = 1 - 2/e$
C) $u_3 = 2 - 6/e$
D) $u_4 = 9 - 24/e$

5 On considère l'intégrale suivante : $J = \int_{-1}^{0} f(t)dt$, f étant la fonction des questions précédentes et on définit

Pour tout n, $S_n = u_0 + u_1 + \dots u_n$, $P_n(t) = 1 + t + t^2 + \dots + t^n$, $R_n = \int_{-1}^{0} f(t) t^{n+1} dt$; $I_n = \int_{-1}^{0} t^{n+1} dt$

A) $\dfrac{1}{e} \le J \le \dfrac{1}{2}$
B) $S_n = \int_{-1}^{0} e^{-(1+t)} P_n(t) dt$
C) $J - S_n = R_n$
D) $I_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n+2}$

6 En utilisant le tableau de variation de f, et pour tout $t \in [-1, 0]$

Pour n impaire
A) $\dfrac{1}{e} t^{n+1} \le f(t) t^{n+1} \le \dfrac{1}{2} t^{n+1}$
B) $\dfrac{1}{e(n+2)} \le R_n \le \dfrac{1}{2(n+2)}$

Pour n paire
C) $\dfrac{1}{2} t^{n+1} \le f(t) t^{n+1} \le \dfrac{1}{e} t^{n+1}$
D) $-\dfrac{1}{2(n+2)} \le R_n \le -\dfrac{1}{(n+2)}$

/rr

Les suites

17 On considère la suite (u_n) pour $n \geq 1$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Soit la suite $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$

A) $\forall k \in N^*,\ \sqrt{k-1} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1}$

B) $u_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$

C) (v_n) est décroissante

D) (v_n) est convergente

18 On pose pour tout entier n, $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, $n \in N$.

A) $I_{n+1} = (n+1)I_n + 1/e$

B) $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

C) I_n est une suite croissante

D) $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

Les intégrales

19

A) $\int_1^2 \frac{1}{(t+1)^2} dt = \ln(3/2) - 1/6$

B) $\int_2^5 \frac{1}{x + 2\sqrt{x-1}} dx = (\ln(3/2) - 1/6)$

C) $\int_0^1 2t^2(1-t^4) = 4/21$

D) $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$

Equation différentielle

20 Soit l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = x$

A) $\frac{x}{6} + \frac{5}{36}$ est une solution particulière de (E)

B) e^{2x} est une solution particulière de $y'' - 5y' + 6y = 0$

C) e^{3x} est une solution particulière de $y'' - 5y' + 6y = 0$

D) la solution générale de (E) est $\alpha e^{2x} + \beta e^{3x} + \gamma\left(\frac{x}{6} + \frac{5}{36}\right)$

7 On considère l'équation suivante, dans l'ensemble des entiers naturels N:

$(E_1) : \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{e(n+2)} < \frac{1}{50}$

A) Le plus petit entier naturel n_0 qui vérifie (E_1) est $n_0 = 5$

B) $(S_5 - \frac{1}{7e}) - (S_5 - \frac{1}{14}) \quad \frac{1}{50}$

C) $A \leq J \leq B$ avec $A = S_5 + \frac{1}{14}$ $\quad B = S_5 + \frac{1}{7e}$

D) $(B - A) < \frac{1}{50}$

8 A) $S_4 = 13 + 34/e$

B) $S_5 = 57 - 154/e$

C) $0.399 \leq J \leq 0.418$

D) L'encadrement de J est à $\frac{1}{50}$ ème

Les complexes

9 Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Pour tout complexe z on désigne par $\bar{z}$ le complexe conjugué de z et arg(z) un argument de z (défini à $2k\pi$ près où $k \in Z$). Soit F la fonction qui, à tout point M du plan, d'affixe z non nulle, associe le point d'affixe M' définie par : $z' = -\frac{1}{z}$

A) $|z'| = |z|$

B) arg(z')=atg(z)+π

C) O, M et M' sont trois points alignés

D) O appartient au segment $[M, M']$

10 On considère le cercle Γ de centre O et de rayon 1. On appelle A et B les points d'affixes respectives 1 et − 1 et C le cercle de centre A, contenant le point O. On considère le cercle Γ de centre O et de rayon 1. Soit M un point du plan d'affixe z et M'=F(M) d'affixe z'

A) L'image du cercle Γ par la fonction F *est* Γ

B) $M \in C \Leftrightarrow |z-1| = 1$

C) pour tout point M de C on a $\left|\frac{z'+1}{z'}\right| = 1$

D) BM'<OM'

11

A) La droite D d'équation x=0,5 est la médiatrice du segment $[OB]$

B) L'image de C par F est la droite D

C) L'image de C par F est Γ

D) L'image de A par F est B

12 Dans le plan complexe P on considère les deux équations :

(E1) : $z^2 - (1+3i)z - 6 + 9i = 0$ et (E2) : $z^2 - (1+3i)z + 6 + 4i = 0$

On désigne par z_1 et z_3 les solutions de E1 et par z_0 et z_2 celles de E2. On désigne également par D, A, B et C les points d'affixes respectives z_0, z_1, z_2 et z_3

A) z_1 est une solutions réelle et z_2 est une solution imaginaire pure

B) z_3=-2+2i

C) z_0=1-i

D) ABCD est un losange

Probabilité

Une urne contient une boule blanche et une boule noire indiscernable au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne. Si elle est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute une boule noire dans l'urne et on recommence jusqu'à ce qu'on tire une boule blanche. Lorsqu'on tire une boule blanche le jeux s'arrête.

Soit, pour tout entier non nul n, les événements suivants :

B_n : « on tire une boule blanche au $n^{ème}$ tirage «

N_n : « on tire une boule noire au $n^{ème}$ tirage «

13 A) La probabilité $P(B_1) = 0,5$ B) probabilité $P(N_1) = 0,5$

Sachant qu'au premier tirage on a tiré une boule noire,

C) la probabilité de tirer une boule blanche au deuxième tirage $P(B_2)/N_1 = 1/3$

D) la probabilité de tirer une boule noire au deuxième tirage $P(N_2)/N_1 = 2/3$

14 Sachant qu'au deuxième tirage on a tiré une boule noire,

A) $P(B_3)/(N_1 \cap N_2) = 1/2$ B) $P(N_3)/(N_1 \cap N_2) = 3/4$

C) La probabilité P que le jeu s'arrête au troisième tirage est $P = 1/12$

D) La probabilité Q que l'on tire une boule blanche au troisième tirage est $Q = 1/2$

Etude d'une identité

15 On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par :

$f(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$ si $x \in]0,1[$

$f(0) = 0$, $f(1) = 0$

A) $f(x) \geq 0$ B) $f(x)$ possède un maximum en $x = 1/2$ et $f(1/2) = \ln 2$

C) Pour tout a et b vérifiant a+b=1 on a : $a\ln\left(\frac{1}{a}\right) + b\ln\left(\frac{1}{b}\right) \leq \ln 2$

D) $a\ln\left(\frac{1}{a}\right) + b\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln 2$ pour $a = b = 1/4$

16 On se propose de généraliser l'inégalité précédente.

Soit N un entier strictement supérieur à 1 et soient $a_1, a_2, \ldots\ldots a_N$ des nombres réels strictement positifs tels que

$\sum_{i=1}^{N} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_N = 1$. On pose $H_N = \sum_{i=1}^{N} a_i \ln\left(\frac{1}{a_i}\right)$

Soit la fonction h définie, pour tout réel t strictement positif, par $h(t) = \ln(t) - t + 1$

A) $h(t) \leq 0$ pour tout $t > 0$ et $\ln t \leq t - 1$ B) $a_i \ln\left(\frac{1}{Na_i}\right) \leq \frac{1}{N} - a_i$

C) $\sum_{i=1}^{N} a_i \ln\left(\frac{1}{Na_i}\right) \leq 0$ D) $H_N > \ln N$

Les suites

17 On considère la suite (u_n) pour $n \geq 1$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$

Soit la suite $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{n}}$

A) $\forall k \in N^*,\ \sqrt{k-1} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1}$

B) $u_n \leq \sqrt{n-1} + \sqrt{n}$

C) (v_n) est décroissante

D) (v_n) est convergente

18 On pose pour tout entier n, $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$, $n \in N$.

A) $I_{n+1} = (n+1)I_n + 1/e$

B) $\frac{1}{(n+1)e} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

C) I_n est une suite croissante

D) $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

Les intégrales

19 A) $\int_1^2 \frac{1}{(t+1)^2} dt = \ln(3/2) - 1/6$

B) $\int_2^5 \frac{1}{x + 2\sqrt{x-1}} dx = (\ln(3/2) - 1/6)$

C) $\int_0^1 2t^2(1-t^4) = 4/21$

D) $\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2$

Equation différentielle

20 Soit l'équation différentielle $y'' - 5y' + 6y = x$

A) $\frac{x}{6} + \frac{5}{36}$ est une solution particulière de (E)

B) e^{2x} est une solution particulière de $y'' - 5y' + 6y = 0$

C) e^{3x} est une solution particulière de $y'' - 5y' + 6y = 0$

D) la solution générale de (E) est $\alpha e^{2x} + \beta e^{3x} + \gamma\left(\frac{x}{6} + \frac{5}{36}\right)$

Matrices

21 On considère l'ensemble des matrices d'ordre 2 défini par $F = \left\{ \begin{bmatrix} a & 2b \\ b & a \end{bmatrix} / a^2 - 2b^2 = 1 \right\}$

A) F est un groupe commutatif

B) $\alpha = -2/7$ et $\beta = -1/7$ vérifient $\alpha M + \beta M^2 = I$; $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

C) $M^2 - 2M - 7I = O$

D) M n'est pas inversible

Les fonctions

22 Soit $f(x) = Arctg x + Arctg \frac{1}{x}$ pour $x \in R^*$

A) $f'(x) = 0$

B) $Arctg\ 1 + Arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{2}$

C) $Arctg x + Arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ pour $x \in R^*$

D) $\lim_{x \to +\infty} x\left(\frac{2}{\pi} Arctg x - 1\right) = -\frac{2}{\pi}$

23 On considère la fonction g définie sur $[0, \pi/2[$ par $g(x) = 2x\cos(2x) - \sin(2x) + \pi/2$

A) $g(x) = 0$ admet une seule solution α_0

B) $g(x) = 0$ admet une deux solutions $\alpha_0 < \beta_0$

C) $0{,}95 < \alpha_0 < 0{,}96$

D) $\beta_0 > 1$

24 Soit f la fonction définie pour $x \neq -1$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{e^x}{x+1}$ et C sa courbe représentative.

A) On a $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

B) La courbe C admet au point d'abscisse 1 une tangente de pente $\frac{1+e}{2}$

C) La courbe C a pour tangente au point d'abscisse 0 la droite d'équation $y = x/2$

D) La droite Δ d'équation $y = x/2$ est asymptote à C