UNIVERSITÉ CADI AYYAD
Ecole Nationale Des Sciences Appliquées
Marrakech

Année : 2006/2007
Session du : 25 Juillet 2007
Responsable : I. OUASSOU

Concours d'entrée en $1^{ére}$ année du cycle préparatoire

Epreuve de mathématiques (durée 1h30min)

Remarques importantes

1) Les documentations, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits.

2) Parmis les réponses proposées elle n'y a qu'une qui est juste.

3) Cocher la case qui correspond à la réponse correcte sur la fiche de réponses.

4) **Règles de notation** :

Réponse juste = **1 point** ; Réponse fausse = **-1 point** ; Sans réponse = **0 point**.

Noter Bien Plus qu'une case chochée = **-1 point**.

Exercice 1

1. $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n^2-(-1)^n n+1}{n+3}$ *n'existe pas.*
2. $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1)-\ln(n+2)$ *n'existe pas.*
3. $\lim_{n\to+\infty} \sin(n)$ *n'existe pas.*
4. $\lim_{n\to+\infty} (-0,7)^n+(0,7)^n$ *n'existe pas.*

Exercice 2

On considère une suite de réels (u_n).

1. *Une suite (u_n) croissante est-elle nécessairement divergente vers $+\infty$?*
2. *Une suite (u_n) divergente vers $+\infty$ est-elle nécessairement croissante?*
3. *Une suite (u_n) bornée est-elle nécessairement convergente?*
4. *Une suite (u_n) croissante et non majorée diverge-t-elle nécessairement vers $+\infty$?*

Exercice 3

Soient z_1 et z_2 les deux nombres complexes solutions de l'équation $z^2 - 4z + 6 = 0$. Dans le plan complexe muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 puis I le milieu du segment $[M_1, M_2]$.

1. *Le nombre $z_1 + z_2$ est imaginaire pur.*
2. *L'affixe du point I est imaginaire pure.*
3. *Les droites (OI) et (M_1M_2) sont perpendiculaires.*
4. *Le triangle OM_1M_2 n'est pas équilatéral.*

Exercice 4

Soit P le polynôme défini par $P(X) = 2X^3 + X^2 - 5X + 2$.

1. *Les réels -2, $\frac{1}{2}$, -1 sont solutions de l'équation $P(x) = 0$.*
2. *L'ensemble S des solutions réelles de l'équation $2e^{3x} + e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$ est $S = \{\ln 2, 0\}$.*
3. *L'ensemble S des solutions réelles de l'équation $2(\ln x)^3 + (\ln x)^2 - 5 \ln x + 2 = 0$ est $S = \left\{e, \frac{1}{e^2}, \sqrt{e}\right\}$.*
4. *L'ensemble S des solutions réelles de l'équation $2 \sin^3 x + \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$ est $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$.*

Exercice 5

D'un sac contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, on extrait trois boules simultanément.

1. *La probabilité pour que, parmi ces trois boules, il y ait toutes celles du sac dont le numéro est un multiple de 5 est $\frac{2}{15}$.*
2. *La probabilité pour que, parmi ces trois boules, il y en ait au plus une dont le numéro est un multiple de 5 est $\frac{13}{15}$.*
3. *La probabilité pour que, parmi ces trois boules, il y en ait au moins une dont le numéro est un multiple de 5 est $\frac{8}{15}$.*
4. *La probabilité pour que, parmi ces trois boules, il y ait toutes celles du sac dont le numéro est un multiple de 3 est $\frac{1}{60}$.*

Exercice 6

Soient les suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n - 1$ *et* $v_n = 3^{u_n}$.

1. *La suite* (v_n) *est géomtrique.*
2. *La suite* (v_n) *est divergente.*
3. *Pour tout entier* $n > 0$, *si* $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{1}{2}$.
4. *La suite* (w_n) *définie pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *par* $w_n = \ln(v_n)$ *est géométrique.*

Exercice 7

Soit (u_n) *la suite définie par* $u_0 = -1$ *et pour tout entier* n , $u_{n+1} = u_n^2 + 1$.

1. *La suite* (u_n) *est positive pour tout* $n \in \mathbb{N}$.
2. *La suite* (u_n) *est croissante.*
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 16\sqrt{2}$.
4. *La suite* (u_n) *est convergente.*

Exercice 8

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \cos x e^{\sqrt{1-\cos^2 x}}$.

1. $f(\pi - x) - f(x) = 0$.
2. *Le point* $I\left(\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ *est un centre de symétrie de la courbe représentative de* f *dans un repère orthonormé.*
3. *La dérivée de* f *est* $f'(x) = \left(\cos^2 x - \sin x\right) e^{\sin x}$.
4. *Une primitive* F *de* f *est définie par* $F(x) = e^{\sin x}$.

Exercice 9

Soit la fonction f *définie par* $f(x) = \ln\left(\dfrac{x-1}{x^2 - x - 2}\right)$.

1. *La fonction* f *est définie sur* $]-1, 1[\bigcup]2, +\infty[$.
2. *La fonction* f *peut s'écrire* $f(x) = \ln(x-1) - \ln(x^2 - x - 2)$ *sur* $]-1, 1[\bigcup]2, +\infty[$.
3. $f'(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x-2}$ *sur* $]-1, 1[\bigcup]2, +\infty[$.
4. *La fonction* f *est croissante sur* $]2, +\infty[$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ *et* $f(0) = 0$.

1. *La fonction f n'est pas continue en 0.*
2. *Sur* $\mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$.
4. *La droite d'équation $y = 1$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f.*

Exercice 11

1. *La fonction* $x \to \cos(4(x+1))$ *est la dérivée de la fonction* $x \to \cos(x+1)\sin(x+1)$.
2. *La fonction* $x \to \dfrac{1}{\sin^2 x}$ *est la dérivée de la fonction* $x \to \ln\left(\dfrac{\sin x}{\cos x + 1}\right)$.
3. *La fonction* $x \to -\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ *est la dérivée de la fonction* $x \to \ln\left(\sqrt{x^2-1} - x\right)$.
4. *La fonction* $x \to (\sin 2x)e^{sin^2 x}$ *est la dérivée de la fonction* $x \to e^{\sin^2 x}$.

Exercice 12

On considère les deux intégrales $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos^2 x dx$ *et* $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 x dx$.

1. $2I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cos^2 x dx$.
2. $I + J = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1$.
3. $I = \dfrac{4+\sqrt{2}}{12}$.
4. $J = \dfrac{5\sqrt{2}-8}{12}$.

Exercice 13

Soit la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

1. *La fonction f est paire.*
2. *On a* $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$.
3. *La fonction f est décroissante sur* $\mathbb{R}$.
4. *Pour tout* $x \in]1, +\infty[$, $f(x) < 2$.

Exercice 14

1. $\int_{-2}^{2} (|x-1| + |x| + |x+1|)\, dx = 0.$
2. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos|x| dx = 0.$
3. *La fonction* $x \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}$ *est une primitive de la fonction* $x \rightarrow \frac{\sin x}{\cos^2 x}$ *sur l'intervalle* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
4. *La fonction* $x \rightarrow \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}$ *est une primitive de la fonction* $x \rightarrow x^2\sqrt{x^2+1}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 15

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *le repère orthonormal de l'espace. Soit $\mathcal{P}$ le plan de repère* $(A, \vec{u}, \vec{v})$ *où* $A(-1, 1, 2)$, $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ *et* $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

1. *Le vecteur* $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ *n'est pas normal au plan* $\mathcal{P}$.
2. *L'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est* $x + y - 2z + 6 = 0$.
3. *La droite $\mathcal{D}$ passant par le point $B(1, 0, -1)$ et de vecteur directeur $\vec{w}$ est définie par* $y + x - 1 = 0$ *et* $z + 2x - 1 = 0$.
4. *Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ se coupent au point* $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$.