

Concours d'accès en 1^{ère} année du cycle normal
de l'Institut Supérieur des Etudes Maritimes
au titre de l'année académique 2005/2006Epreuve : *Mathématiques*
Durée : *2 heures*

Exercice 1

On considère le polynôme P défini par : $P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63$.

1. Calculer $P(i\sqrt{3})$ et $P(-i\sqrt{3})$,
2. Déterminer le polynôme Q du second degré à coefficients réels, qui, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :
 $P(z) = (z^2 + 3)Q$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^x}{1 + 2e^x} - \ln(1 + 2e^x)$

4. Calculer $g'(x)$
5. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$
6. Dresser le tableau de variation de g

Exercice 3

On considère la suite numérique u_n définie par son premier terme $u_0 = 8$ et, pour tout nombre entier naturel non nul n , par la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{u_n - 2}{3}$ On considère en outre la suite numérique v_n définie pour tout nombre entier naturel n , par $v_n = u_n + 1$.

7. Calculer u_3
8. Montrer que v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$; préciser son premier terme.
9. Exprimer v_n en fonction de n ; en déduire l'expression de u_n en fonction de n .

Exercice 4 : Etudier les limites en $\pi/2$ des fonctions suivantes :

$$10. f(x) = \frac{1 + \cos 2x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$$

$$11. f(x) = \frac{\sqrt{1 + \cos x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$$

Etudier les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes :

$$12. f(x) = \frac{x^3 - x^2 + 2}{(x^2 + 1)(x - 3)}$$

$$13. f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}$$

Exercice 5 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

$$14. f(x) = \ln |e^x \cos x + e^{-x} \sin x|$$

$$15. f(x) = x^{\ln x}$$

$$16. f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Exercice 6 : Calculer les intégrales suivantes:

$$17. I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 4x \cos 2x \, dx$$

$$18. I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^4 x \cos^2 x \, dx$$

$$19. I = 2 \int_0^1 (x-1)(x^2 - 2x + 2)^3 \, dx$$

$$20. I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x} \, dx$$