

تمرين 1:

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(1) احسب U_1 و U_2 :

$$U_2 = \frac{1252}{121} \text{ و } U_1 = \frac{122}{11}$$

(2) تحقق من ان : $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$ لكل n من $\mathbb{N}$

$$U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10}{11}U_n - \frac{120}{11} = \frac{10}{11}(U_n - 12)$$

وبالتالي $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$ لكل n من $\mathbb{N}$

(3) أ- بين بالترجع ان $U_n < 12$ لكل n من $\mathbb{N}$

من اجل $n = 0$ لدينا $U_0 = 11$ و $11 \leq 12$ اذن $U_0 \leq 12$

نفترض ان : $U_n \leq 12$ و $\forall n \in \mathbb{N}$ و نبين ان $U_{n+1} \leq 12$

$$\frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} \leq \frac{120}{11} + \frac{12}{11} \text{ اي } \frac{10}{11}U_n \leq \frac{120}{11} \text{ و اي ان } U_n \leq 12$$

$$\text{وبالتالي } U_{n+1} \leq 12 \text{ ومنه } U_{n+1} \leq \frac{132}{11}$$

$$\text{ومنه } \forall n \in \mathbb{N} ; U_n \leq 12$$

ب- بين ان (U_n) تزايدية قطعاً

$$U_{n+1} - U_n = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} - U_n = \frac{-1}{11}U_n + \frac{12}{11} = \frac{1}{11}(12 - U_n) > 0$$

(لان $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \leq 12$)

(4) لتكن (V_n) المتتالية العددية بحيث $\forall n \in \mathbb{N} V_n = U_n - 12$

أ- بين ان المتتالية (V_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{10}{11}$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12) = \frac{10}{11}V_n = qV_n$$

ومنه فان المتتالية (V_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{10}{11}$

ب- اكتب (V_n) بدلالة n

$$\text{لدينا } \forall n \in \mathbb{N} V_n = U_n - 12 \text{ وبالتالي } V_0 = U_0 - 12 = 11 - 12 = -1$$

وبما أن المتتالية (V_n) متتالية هندسية اساسها $\frac{10}{11}$

$$\text{فإن } \forall n \in \mathbb{N} V_n = V_0 q^n = -1 \times \left(\frac{10}{11}\right)^n = -\left(\frac{10}{11}\right)^n$$

ت- بين ان $\forall n \in \mathbb{N} U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$

$$\forall n \in \mathbb{N} V_n = U_n - 12 \Leftrightarrow U_n = V_n + 12 = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$$

تمرين II: ليكن $ABCD$ متوازي الاضلاع و P و Q و R النقاط المعرفة بمايلي :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \text{ و } PQRA \text{ متوازي الاضلاع}$$

نريد ان نبرهن على ان المستقيمت (CQ) و (DP) و (BR) متلاقية

(1) بين ان P مرجح A و B معينتين بمعاملين يتم تحديدهما

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{PB}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

ومنه ان P مرجح $(A;1)$ و $(B;2)$

(ب) بين ان R مرجح A و D معينتين بمعاملين يتم تحديدهما

$$\overrightarrow{AR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AR} = 3\overrightarrow{AR} + 3\overrightarrow{RD}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AR} - 3\overrightarrow{AR} - 3\overrightarrow{RD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RD} = \vec{0}$$

ومنه ان R مرجح $(A;1)$ و $(D;3)$

(2) لتكن I نقطة تقاطع (DP) و (BR) ولتكن G مرجح $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(D,3)$

بين ان $I=G$ (*)

لدينا G مرجح $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(D,3)$ ، حسب تجمعية المرجح ، لدينا :

$G \in (DP)$ اي $(D,3)$ و $G \in (BR)$ اي $(B,2)$ و $(R,4)$ اي $G \in (BR)$

ومنه فإن G نقطة تقاطع (DP) و (BR) وبالتالي $I=G$

(3) بين ان Q مرجح $(A,-5)$ و $(B,8)$ و $(D,9)$ (**)

لدينا $PQRA$ متوازي الاضلاع، اذن $\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QA}$

يعني : $\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QA} = \vec{0}$ اي Q مرجح $(A,-1)$ و $(P,1)$ و $(R,1)$

وبما أن P مرجح $(A;\frac{1}{3})$ و $(B;\frac{2}{3})$ و R مرجح $(A;\frac{1}{4})$ و $(D;\frac{3}{4})$

فإن Q مرجح $(A,-1)$ و $(A;\frac{1}{3})$ و $(B;\frac{2}{3})$ و $(A;\frac{1}{4})$ و $(D;\frac{3}{4})$ وحسب خاصية الصمود بضرب

المعاملات في 12 نحصل على :

Q مرجح $(A,-12)$ و $(A;4)$ و $(B;8)$ و $(A;3)$ و $(D;9)$

وبالتالي Q مرجح $(A,-5)$ و $(B,8)$ و $(D,9)$

تجمعية المرجح

(4) استنتج ان Q منتصف $[CI]$

لدينا $ABCD$ متوازي الاضلاع، اذن $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$ فإن $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

ومنه C مرجح $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(D,1)$ اي C مرجح $(A,-6)$ و $(B,6)$ و $(D,6)$

وبما ان I مرجح $(A,1)$ و $(B,2)$ و $(D,3)$ و Q مرجح $(A,-5)$ و $(B,8)$ و $(D,9)$

فإن Q مرجح $(A,-6)$ و $(B;6)$ و $(D;6)$ و $(A;1)$ و $(B;2)$ و $(D;3)$

(I;6)

(C;6)

اي Q مرجح $(C,6)$ و $(I;6)$ وهذا يعني ان Q منتصف $[CI]$

(5) استنتج ان المستقيمت (CQ) و (DP) و (BR) متلاقية

لدينا Q منتصف $[C]$ ومنه $I \in (CQ)$

ولدينا I نقطة تقاطع (DP) و (BR)

اذن المستقيمت (CQ) و (DP) و (BR) تتلاقى في النقطة I

خاصية الصمود

تجمعية المرجح

تمرين III (*): لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \text{ و } U_0 \in [0; 1]$$

1- بين أن: $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \in [0; 1]$ من أجل $n=0$ لدينا $U_0 \in [0; 1]$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

نفترض $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \in [0; 1]$

ونبين أن $U_{n+1} \in [0; 1]$

لدينا $0 \leq U_n \leq 1$ يعني $1 \leq U_n + 1 \leq 2$ اي $\frac{1}{2} \leq \frac{U_n+1}{2} \leq 1$

ومنه $0 \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \leq 1$ وبالتالي $U_{n+1} \in [0; 1]$

اذن $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \in [0; 1]$

2- بين أن : المتتالية U_n تزايدية

ضرب في المرافق

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} - U_n = \frac{\frac{1+U_n}{2} - U_n^2}{\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + U_n} = \frac{1+U_n - U_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + U_n\right)} = \frac{(1-U_n)(1+2U_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + U_n\right)}$$

ولدينا $U_n \leq 1$ اي $1 - U_n \geq 0$ و $0 \leq U_n \leq 1$ اي $1 \leq 1 + 2U_n \leq 3$

اذن $(1 - U_n)(1 + 2U_n) \geq 0$ و $2\left(\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + U_n\right) \geq 0$

وبالتالي $U_{n+1} - U_n \geq 0$ وهذا يعني ان المتتالية U_n تزايدية

3- نضع: $U_0 = \cos(\theta)$ حيث $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$

بين أن $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$ (علما ان $2\cos^2(y) = 1 + \cos(2y)$)

من أجل $n=0$ لدينا $U_0 = \cos(\theta)$ ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=0$

نفترض $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$

ونبين ان $U_{n+1} = \cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$

لدينا $U_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(\frac{\theta}{2^n})}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos(2\frac{\theta}{2^{n+1}})}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos^2(\frac{\theta}{2^{n+1}})}{2}} \text{ فإن}$$

اي $U_{n+1} = \cos(\frac{\theta}{2^{n+1}})$ (علما ان $2\cos^2(y) = 1 + \cos(2y)$)
ومنه $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = \cos(\frac{\theta}{2^n})$

الاستدلال
بالترجع

هذا وبالله التوفيق