Faculté des Sciences
Département de Physique

2012/2013

Contrôle final de physique nucléaire
SMP S5 Parcours énergétique

Exercice 1 :

Le noyau ${}^{A}_{Z}X$ est considéré sphérique et de densité de charge uniforme.

a- Etablir la condition sur les masses des atomes M(A,Z) et M(A,Z-1), pour que le noyau ${}^{A}_{Z}X$ se transforme ${}^{A}_{Z-1}Y$ par désintégration β^+

b- Montrer que lorsque l'émission β^+ est possible la capture électronique l'est également. La réciproque est elle vraie ? justifier.

c- Montrer que l'énergie que l'énergie électrostatique d'une sphère de rayon R et de charge Q est : $W = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$

d- En déduire que l'énergie électrostatique d'un noyau ${}^{A}_{Z}X$ peut s'écrire sou la forme : $a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}$

e- On considère les deux noyaux ${}^{A}_{Z}X$ et ${}^{A}_{Z-1}Y$ comme noyaux miroirs. Calculer la différence $\Delta M = (M_X - M_Y)c^2$ en fonction de a_c et A

f- Montrer que dans l'expression $R = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ du rayon nucléaire : $r_0 = \frac{0,863}{\Delta M + 1,3} A^{\frac{2}{3}}$

On donne :

L'énergie de liaison totale d'un noyau ${}^{A}_{Z}X$:

$$B(A,Z) = d_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{A}$$

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} = \frac{1}{137} \qquad \hbar c = 197 MeV.fermi \qquad M_H c^2 = 938{,}25 MeV, \quad M_n c^2 = 939{,}55 MeV$$

Exercice 2 :

1- Par désintégrations successives de type α et β^-, le noyau de thorium $^{232}_{90}Th$ conduit au noyau stable $^{208}_{83}Pb$. Calculer le nombre des particules α et β^- émises.

2- La période radioactive du noyau $^{232}_{90}Th$ est 14 milliards d'années. Les éléments intermédiaires de la chaîne radioactive ont tous des périodes négligeables devant celle du $^{232}_{90}Th$. Dans une roche ancienne on trouve 7 grammes du $^{232}_{90}Th$, pour un gramme du $^{208}_{83}Pb$, en admettant que ce dernier provient uniquement de la désintégration du $^{232}_{90}Th$, calculer alors l'âge de cette roche.

3- Calculer le volume d'hélium formé (correspondant dans les conditions normales de température et de pression), en supposant qu'au cours de ce temps le gaz soit totalement occlus dans la roche.

a) $_{Z}^{A}X \longrightarrow _{Z-1}^{A}Y^{*} + \beta^{+} + \nu$

Le bilan énergétique est donné par :

$$m_X c^2 = m_Y c^2 + m_e c^2 + T_R + T_{\beta^+} + T_\nu + E^*$$

$m_X = M_X + Z m_e$, $m_Y = M_Y - (Z-1) m_e$

$T_{\beta^+} + T_\nu = T_{\beta^+ max} \gg T_R$ donc :

$$Q = m_X c^2 - m_Y c^2 - m_e c^2 = T_{\beta^+ max} + E^*$$
$$= M_X c^2 - Z m_e c^2 - M_Y c^2 + (Z-1) m_e c^2 - m_e c^2$$
$$= M_X c^2 - M_Y c^2 - 2 m_e c^2$$

$Q > 0 \Rightarrow M_X c^2 - M_Y c^2 - 2 m_e c^2 > 0$

$\Rightarrow \boxed{M_X > M_Y + 2 m_e}$ ou $M_X c^2 > M_Y c^2 + 1{,}022\,MeV$

b) La CE est : $_{Z}^{A}X + \bar{e} \longrightarrow _{Z-1}^{A}Y^{*} + \nu$

$Q = M_X c^2 - M_Y c^2 = T_\nu + E^* > 0$

$\Rightarrow M_X c^2 > M_Y c^2$ (voir cours et TD)

On a Pour que la CE soit possible il faut que

$M_X c^2 - M_Y c^2 > 0$

Pour que β^+ soit possible il faut que

$M_X c^2 - M_Y c^2 > 2 m_e c^2 > 0$ donc

si β^+ est possible la CE l'est aussi

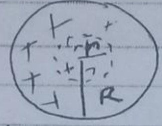
6) On calcule d'abord le champ électrique créé à l'intérieur de la sphère, et ce en appliquant le théorème de Gauss.

$$E\int dS = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

* Pour $r > R$ on a : $E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

* Pour $r < R$



$$4\pi r^2 E = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$q_{int} = Q\frac{r^3}{R^3} \Longrightarrow \boxed{E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r}{R^3}}$$

* Le potentiel.

$$r > R \Rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\int_R E\, dr$$

$$\Rightarrow V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$$

$$r < R \Rightarrow V(r) - V(R) = \int_r^R E\, dr$$

$$\Rightarrow V(r) - V(R) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}\left(R^2 - r^2\right)$$

d'où

$$V(r) = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^3}r^2 + \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} + V(R)$$

(3)

Continuité du potentiel : $V(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$

d'où

$$V(r) = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R^3} r^2 + \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$$

$$= -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0} \frac{r^2}{R^3} + \frac{3}{8\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R}$$

D'où,

$$V(r) = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

L'énergie potentielle est définie

$$W = \frac{1}{2} \int_0^R V(r)\, dq \qquad \text{avec } dq = \rho\, dr$$

$$dq = 4\pi r^2 \rho\, dr$$

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow dq = \frac{3Q}{R^3} r^2 dr$$

donc $W(r) = \frac{3Q^2}{R^3} \cdot \frac{1}{8\pi\varepsilon_0 R} \int_0^R \left(3r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right) dr$

Tout calcul fait on aura.

$$\boxed{W = \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{R_0}}$$

(11)

d) En considérant le noyau comme une sphère chargée de Ze Coulombs, on peut écrire alors l'énergie coulombienne comme :

$$E = \frac{3}{5}\frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} \quad , \text{ et comme } R = r_0 A^{1/3}$$

donc :

$$E = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\frac{Z^2}{A^{1/3}} = a_c \frac{Z^2}{a_c}$$

avec :

$$a_c = \frac{3}{5}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

e) La masse atomique s'écrit :

$$M(A,Z)c^2 = ZM_H c^2 + N m_n c^2 - B(A,Z)$$

$$M(A,Z)c^2 = ZM_H c^2 + N m_n c^2 - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(N-Z)^2}{A}$$

X et Y sont deux noyaux miroirs donc :

$N_X = Z_Y$ et $N_Y = Z_X \Rightarrow N_X = Z_Y = Z_X - 1$

$$A = N_X + Z_X = N_Y + Z_Y = 2Z_X - 1$$

$$M_X c^2 = Z_X M_H c^2 + N_X m_n c^2 - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z_X^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(N_X - Z_X)^2}{A}$$

$$M_Y c^2 = Z_Y M_H c^2 + N_Y m_n c^2 - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z_Y^2}{A^{1/3}} + a_a \frac{(N_Y - Z_Y)^2}{A}$$

$\Delta M c^2 = M_X c^2 - M_Y c^2$ en remplaçant N_X par $Z_X - 1$, N_Y par Z_X : on a

$$\Delta M = M_H c^2 - m_n c^2 + a_c \frac{(2Z_X - 1)}{A^{1/3}}$$

et comme $A = 2Z_X - 1$ on a alors :

$$\boxed{\Delta M = M_H c^2 - m_n c^2 + a_c A^{2/3}}$$

5

f. $R = r_0 A^{1/3}$, $a_c = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$

d'autre part :

$$a_c = \frac{\Delta M + m_n c^2 - M_H c^2}{A^{2/3}}$$

$m_n c^2 - M_H c^2 = 1,3 \Rightarrow$

$$a_c = \frac{\Delta M + 1,3}{A^{2/3}} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}$$

$$\Rightarrow r_0 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{A^{2/3}}{\Delta M + 1,3}$$

$$r_0 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c} \hbar c \cdot \frac{A^{2/3}}{\quad}$$

$$r_0 = \frac{3}{5} \cdot \frac{197}{137} \frac{A^{2/3}}{\Delta M + 1,3}$$

Donc

$$r_0 = \frac{0,863}{\Delta M + 1,3} A^{2/3}$$

(6)

Exercice 2.

a) $^{232}_{90}Th \longrightarrow ^{208}_{83}Pb$

β^- désintégration isobarique (A ne change pas)

$\alpha \Rightarrow$ A diminue de 4.

$\Rightarrow 232 - 208 = 24 = 6 \times 4 \Rightarrow$ 6 désintégrat α.

D'autre part $Z_{Th} = 90$ $Z_{Pb} = 83$
et puisque Z diminue de 2 lors de la désintégration α et ~~de 1 lors de β^-~~ augmente de 1 lors de β^- $\Rightarrow$ $90 - 83 = 7$
$2 \times 6 = 12$ donc
$90 - 12 = 78$ et $78 + x = 83 \Rightarrow \boxed{x = 5}$

Donc on a 6 désintégration α et 5 désintégration β^-

b) On a $^{232}Th \longrightarrow ^{208}Pb$
(1) (2)

à t on a $N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$

$N_2(t)$ correspond au nombre de désintégrat de $N_1(t)$ donc

$N_2(t) = N_0(1 - e^{-\lambda_1 t})$ On a :

$\frac{N_1(t)}{N_2(t)} = 7 = \frac{e^{-\lambda_1 t}}{1 - e^{-\lambda_1 t}} \Rightarrow$

$e^{-\lambda_1 t}(1 + 7) = 7 \Rightarrow e^{-\lambda_1 t} = \frac{7}{8}$

$\Rightarrow t = 2,697 \, 10^9$ ans

7

c) On a pour 7 grammes de Th on a 1g de Pb. le nbre de noyau dans 1 g de ce dernier est :

$$N_{Pb} = \frac{1}{208} \cdot N = 2,9\ 10^{21} \text{ noyaux.}$$

D'autre part pour un noyau formé de ^{208}Pb on a 6 particules α formées donc pour 1 gramme de Pb formé on a creation de $6 . N_{Pb}$ donc

$N_\alpha = 1,74\ 10^{22}$ pour un volume de

$$V_\alpha = 22,4 . \frac{N_\alpha}{N}$$

$V_\alpha = 0,03$ l donc pour

$2,9\ 10^{22}$ noyaux désintegrés on a formation de 0,03 litre de gaz ^4He