

Exercice: 5

L'oscillateur harmonique (OH) à 1 dimension (1D)

1) utilisation de la méthode polynomiale Hamiltonien $H = \frac{1}{2m} P_x^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

$$H|\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle$$

$$H|\phi\rangle = E|\phi\rangle$$

1)

$$\langle x|\phi\rangle \equiv \phi(x) \quad \begin{array}{l} \text{fonction d'onde} \\ \text{Produit} \\ \text{scalaire} \end{array}$$

$$\langle x|P_x|\phi\rangle = \frac{\hbar}{i} \langle x|\frac{d}{dx}|\phi\rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \langle x|\phi\rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \phi(x)$$

$$\langle x|P_x^2|\phi\rangle = \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 \frac{d^2}{dx^2} \langle x|\phi\rangle = -\hbar^2 \frac{d^2}{dx^2} \phi(x)$$

$$\langle x|X|\phi\rangle = x \langle x|\phi\rangle = x \phi(x) = x \phi(x)$$

$$\langle x|X^2|\phi\rangle = x^2 \phi(x) = x^2 \phi(x)$$

on a donc pour l'équation de Schrödinger en représentation $\{|x\rangle\}$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right) \phi(x) = E \phi(x) \quad (1)$$

2) on veut déterminer les énergies propres et les fonctions propres.

a) $q = \sqrt{\lambda} x$ sans dimension

Car $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ est appelée longueur caractéristique

$q = \frac{1}{x_0} \cdot x \rightarrow$ longueur
sans dimension.

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dq} \frac{dq}{dx} = \sqrt{\lambda} \frac{d}{dq}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \lambda \frac{d^2}{dq^2}$$

$$x \rightarrow q \Rightarrow \phi(x) \rightarrow \phi(q)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \phi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dq^2} \phi(q) = -\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{m\omega}{\hbar} \frac{d^2}{dq^2} \phi(q) = -\frac{\hbar\omega}{2} \frac{d^2}{dq^2} \phi(q)$$

$$\frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \phi(x) = \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{q^2}{\alpha} \phi(q) = \frac{1}{2} m\omega^2 \frac{\hbar}{m\omega} q^2 \phi(q) = \frac{1}{2} \hbar\omega q^2 \phi(q)$$

(1) devient $-\frac{\hbar\omega}{2} \frac{d^2}{dq^2} \phi(q) + \frac{1}{2} \hbar\omega q^2 \phi(q) = E \phi(q)$

on multiplie par $-\frac{2}{\hbar\omega}$

$$\frac{d^2}{dq^2} \phi(q) - q^2 \phi(q) = -\frac{2E}{\hbar\omega} \phi(q)$$

E énergie, $\hbar\omega$ énergie

$\varepsilon = \frac{2E}{\hbar\omega}$ paramètre sans dimension

$$\left(\frac{d^2}{dq^2} - q^2 + \varepsilon \right) \phi(q) = 0$$

$$\left[\frac{d^2}{dq^2} + (\varepsilon - q^2) \right] \phi(q) = 0 \quad *$$

(2. b) Vérifions que $e^{-q^2/2}$ est solution de * pour $\varepsilon = 1$

$$\frac{d^2}{dq^2} e^{-q^2/2} = \frac{d}{dq} (-q e^{-q^2/2}) = -e^{-q^2/2} + q^2 e^{-q^2/2}$$

$$\left(\frac{d^2}{dq^2} + 1 - q^2 \right) (\phi(q)) = -e^{-q^2/2} + q^2 e^{-q^2/2} + e^{-q^2/2} - q^2 e^{-q^2/2} = 0$$

Solution acceptable physiquement car $e^{-q^2/2}$ est de carré sommable

$$\phi(q) = e^{-q^2/2} \text{ bornée } \rightarrow 0 \text{ qd } q \rightarrow \pm\infty$$

$$\varepsilon = 1 = \frac{2E_0}{\hbar\omega}$$

$$\boxed{E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}} \quad (\text{énergie de l'état fondamentale})$$

2) c) pour ε quelconque. on pose $\phi(q) = e^{-q^2/2} h(q)$

Equation différentielle satisfaite par $h(q)$.

$$\frac{d^2}{dq^2} (e^{-q^2/2} h(q)) = \frac{d^2}{dq^2} e^{-q^2/2} h(q) + 2 \left(\frac{d}{dq} (e^{-q^2/2}) \right) \frac{d}{dq} h(q) + e^{-q^2/2} \frac{d^2}{dq^2} h(q)$$

$$\left[\frac{d^2}{dq^2} + (\varepsilon - q^2) \right] \phi(q) = 0$$

$$\Rightarrow \{ (-1 + q^2) h(q) - 2q h'(q) + h''(q) + (\varepsilon - q^2) h \} e^{-q^2/2} = 0$$

$$\rightarrow h''(q) - 2q h'(q) + (\varepsilon - 1) h(q) = 0$$

d) on cherche la solution $h(q)$ sous la forme d'une série de puissances de q

$$h(q) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p q^p$$

$$\frac{d}{dq} h(q) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p p q^{p-1}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dq^2} h(q) &= \sum_{p=0}^{\infty} c_p p(p-1) q^{p-2} = \sum_{p=2}^{\infty} c_p p(p-1) q^{p-2} \\ &= \sum_{p=2}^{\infty} c_p p(p-1) q^{p-2} \end{aligned}$$

p indice muet on pose $p-2 = n \Rightarrow p = n+2$

$$\frac{d^2}{dq^2} h(q) = \sum_{n=2}^{\infty} c_{n+2} (n+2)(n+1) q^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+2} (n+2)(n+1) q^n$$

n indice muet

$$\frac{d^2}{dq^2} h(q) = \sum_{p=0}^{\infty} c_{p+2} (p+2)(p+1) q^p$$

$$h''(q) - 2q h'(q) + (\varepsilon - 1) h(q) = 0$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} \{ c_{p+2} (p+2)(p+1) - 2c_p p + (\varepsilon - 1) c_p \} q^p = 0 \quad (***)$$

(***) vrai si $c_{p+2} (p+2)(p+1) + (\varepsilon - 2p - 1) c_p = 0$

$$c_{p+2} = \frac{2p - \varepsilon + 1}{(p+2)(p+1)} c_p$$

relation de récurrence qui lie les coefficients c_p

(ii)

$$\frac{c_{p+2}}{c_p} = \frac{2p - \varepsilon + 1}{(p+2)(p+1)}$$

pour p grand ($p \rightarrow \infty$)

$$\frac{c_{p+2}}{c_p} \sim \frac{2p}{p^2} = \frac{2}{p} = \frac{1}{(p/2)}$$

La fonction e^{q^2} a le développement suivant

$$\begin{aligned} e^{q^2} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} q^{2k} \quad p = 2k \text{ pour} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{(p/2)!} q^p \end{aligned}$$

$$\frac{c_{p+2}}{c_p} = \frac{\left(\frac{p}{2}\right)}{\left(\frac{p+2}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{p}{2}\right)!}{\left(\frac{p}{2}+1\right)!} = \frac{\left(\frac{p}{2}\right)}{\left(\frac{p}{2}+1\right)\left(\frac{p}{2}\right)!} \sim \frac{1}{p/2} \text{ si } p \text{ grand.}$$

$h(q)$ a le même comportement que e^{q^2} et donc

$$\phi(q) = e^{-q^2/2} e^{q^2} = e^{q^2/2} \rightarrow \infty \text{ si } q \rightarrow \pm \infty$$

cette fonction d'onde diverge si $q \rightarrow \pm \infty$, elle n'est pas de carré sommable

physiquement inacceptable.

$\Rightarrow$ il faut limiter la série infinie en un polynôme de degré

$$n \text{ fini } h(q) = \sum_{p=0}^n c_p q^p$$

Dernier coefficient de cette série : C_n

$$\text{donc } C_{n+1} = C_{n+2} = \dots = 0$$

relation de récurrence.

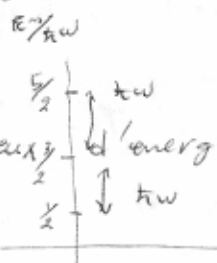
$$C_{n+2} = 0 = \frac{(2n+1) \cdot \epsilon}{(2n+2)(2n+1)} C_n$$

$$E_n = 2n+1$$

$$2 \frac{E_n}{\hbar \omega} = 2n+1 \Rightarrow$$

$$\boxed{E_n = (n + 1/2) \hbar \omega}$$

énergies propres de l'OH à 1D



$$E_{n+1} - E_n = (n + 3/2 - n - 1/2) \hbar \omega = \hbar \omega$$

équi distants

$h_n(q)$ a une partie bien définie (6 connu)

$$h_4(q) = \sum_{n=0}^4 c_n q^n = c_0 + c_2 q^2 + c_4 q^4$$

$$h_4(-q) = h_4(q)$$

c_1 connu

$$h_5(q) = c_1 q + c_3 q^3 + c_5 q^5$$

$$h_5(-q) = -h_5(q)$$

$$h_n(-q) = (-1)^n h_n(q)$$

(iii)

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} \quad z = \sqrt{\frac{m}{\hbar}} x$$

$$H_n'' - 2z H_n' + 2n H_n = 0$$

ou $h_n(q) = P_n(q)$ satisfait à l'équation différentielle

$$P_n'' - 2q P_n' + (2n-1) P_n = 0 \Rightarrow \boxed{P_n'' - 2q P_n' + 2n P_n = 0}$$

on a le même type d'équation différentielle

$$\Rightarrow \boxed{P_n(q) = C_n H_n(q)} \quad C_n \text{ facteur à déterminer.}$$

$$\phi_n(q) = e^{-q^2/2} P_n(q) = C_n e^{-q^2/2} H_n(q)$$

$$\boxed{\phi_n(x) = C_n e^{-\lambda x^2/2} H_n(\sqrt{\lambda} x)} \quad \text{fonctions propres de l'oscillateur harmonique.}$$

$$\phi_0(x) = C_0 e^{-\lambda x^2/2} H_0(\sqrt{\lambda} x)$$

$$\text{en effet } H_0(z) = e^{z^2} e^{-z^2} = 1$$

$$\underbrace{\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle}_{\text{norme}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0^*(x) \phi_0(x) dx = |C_0|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\lambda x^2}$$

$$= |C_0|^2 \times \sqrt{\pi/\lambda} = 1$$

$$\text{on choisit } C_0 \text{ réel positif} \quad C_0 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}$$

on a donc pour la fonction d'onde normée de l'état fondamental

$$\phi_0(x) = C_0 e^{-\lambda x^2/2}$$

$$\boxed{\phi_0(x) = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda x^2/2}} \quad \Rightarrow E_0 = \frac{\hbar \omega}{2}$$

iii) $n=0$ état fondamental (fait)

$n=1$ 1^{er} état excité

$$\begin{aligned}\phi_{n=1}(q) &= C_1 e^{-q^2/2} (-1)^1 e^{q^2} \frac{d}{dq} e^{-q^2} \\ &= C_1 2q e^{-q^2/2}\end{aligned}$$

$$\phi_{n=1}(x) = C_1 2\sqrt{\lambda} x e^{-\lambda x^2/2}$$

$$\langle \phi | \phi_1 \rangle = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} |C_1|^2 4\lambda x^2 e^{-\lambda x^2} dx = 1$$

$$4\lambda |C_1|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^2 e^{-\lambda x^2} = 1$$

$$4\lambda |C_1|^2 \cdot \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} = 1$$

$$\Rightarrow |C_1|^2 = \left(\frac{4\lambda}{4\pi}\right)^{1/2}, \quad C_1$$

$$C_1 \text{ réel positif} \Rightarrow C_1 = \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{1/4}$$

$$\phi_1(x) = \left(\frac{\lambda}{4\pi}\right)^{1/4} 2\sqrt{\lambda} x e^{-\lambda x^2/2}$$

fonction propre impaire) correspondant au 1^{er} état excité

Exercice : VIII

Pour un OHS, on a

$$H_f = \frac{1}{2m} p_{x_f}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x_f^2$$

$$\begin{aligned} 1) \quad H_{1+2} &= H_{x_1} + H_{x_2} + k x_1 x_2 \\ &= \frac{1}{2m} p_{x_1}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x_1^2 + \frac{1}{2m} p_{x_2}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x_2^2 + k x_1 x_2 \\ &= \frac{1}{2m} (p_{x_1}^2 + p_{x_2}^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (x_1^2 + x_2^2) + k x_1 x_2 \end{aligned}$$

Pour trouver les valeurs propres de l'énergie on introduit les opérateurs U et V tels que

$$\begin{cases} X_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v) \\ X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v) \end{cases}$$

$$X_1^2 + X_2^2 = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + 4uv + 4v + 4u + v^2 + 4v - 4u) \\ = u^2 + v^2 \quad \text{car } [4u, v] = 0$$

$$\begin{cases} U = \frac{1}{\sqrt{2}} (X_1 + X_2) \\ V = \frac{1}{\sqrt{2}} (X_1 - X_2) \end{cases}$$

$$[u, v] = \frac{1}{2} \{ [x_1 + x_2, x_1 - x_2] \}$$

$$= \frac{1}{2} \{ [x_1, x_1] - [x_1, x_2] + [x_2, x_1] - [x_2, x_2] \}$$

en effet $\langle x_1, x_2 | \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2} \rangle = \langle x_1 | \varphi_{x_1} \rangle \langle x_2 | \varphi_{x_2} \rangle - \langle x_2 | \varphi_{x_2} \rangle \langle x_1 | \varphi_{x_1} \rangle$
 $\underset{\text{mbre}}{=} x_1 x_2 \langle \varphi_{x_1}, \varphi_{x_2} \rangle - \underset{\text{mbre}}{x_2 x_1 \langle \varphi_{x_2}, \varphi_{x_1} \rangle} = 0$

- De mme 1 on mon tre

$$p_{\pi_1}^2 + p_{\pi_2}^2 = p_u^2 + p_v^2 \quad \text{avec} \quad (p_u, p_v) = 0$$

H devient

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2m} (p_u^2 + p_v^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (u^2 + v^2) + \frac{1}{2} k (u+v)(u-v) \\
 &= \frac{1}{2m} (p_u^2 + p_v^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 (u^2 + v^2) + \frac{1}{2} k (u^2 - v^2) \\
 &= \frac{1}{2m} p_u^2 + \frac{1}{2} (m \omega^2 + k) u^2 + \frac{1}{2m} p_v^2 + \frac{1}{2} (m \omega^2 - k) v^2
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} (m \omega^2 + k) = \frac{1}{2} m \left(\omega^2 + \frac{k}{m} \right) = \frac{1}{2} m \omega_1^2$$

$$\omega_1^2 = \omega^2 + \frac{k}{m}$$

$$\frac{1}{2} (m \omega^2 - k) = \frac{1}{2} m \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) = \frac{1}{2} m \omega_2^2 \quad \text{avec } \omega_2^2 = \omega^2 - \frac{k}{m}$$

$$\text{donc } H = \underbrace{\frac{1}{2m} p_u^2 + \frac{1}{2} m \omega_1^2 u^2}_{H_1} + \underbrace{\frac{1}{2m} p_v^2 + \frac{1}{2} m \omega_2^2 v^2}_{H_2}$$

c'est l'hamiltonien de deux oscill indépendants de même masse m mais de pulsation différentes $\boxed{\omega_1 \neq \omega_2}$

E valeur propre de H s'écrit

$$E = (n_1 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_1 + (n_2 + \frac{1}{2}) \hbar \omega_2, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, 3$$

$$\textcircled{c} \quad |n_1, n_2\rangle = |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$$

$$|n_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!}} (a_1^+)^{n_1} |n_1=0\rangle$$

$$|n_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_2!}} (a_2^+)^{n_2} |n_2=0\rangle$$

état fondamental

$$\psi_0(u) = \left(\frac{\beta_1}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\beta_1 u^2 / 2}, \quad \beta_1 = \frac{m \omega_1}{\hbar}$$

d) Les niveaux d'énergie ne sont pas dégénérés

à une valeur donnée de E_{n_1, n_2} (ω_1, ω_2) correspondent un ket unique $|n_1, n_2\rangle$.

⇒ H forme à lui seul un ELOE dans l'espace des états du système total.

IX. A OHS à deux dimensions

à 1 dimension $H_j = \frac{1}{2m} p_{xj}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x_j^2$

$$H = H_x + H_y = (a_x^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + 1) \hbar \omega$$

$$|n_x\rangle \otimes |n_y\rangle = |n_x, n_y\rangle \text{ ket propre de } H$$

Si on introduit l'opérateur nombre d'occupation pour ϵ_x et ϵ_y

$$\hat{n}_x = a_x^\dagger a_x, \quad \hat{n}_y = a_y^\dagger a_y$$

op $\hat{n} |n_x, n_y\rangle$

$$(\hat{n}_x |n_x\rangle) \otimes |n_y\rangle = \underbrace{n_x}_{\text{nombre}} |n_x, n_y\rangle$$

$$\hat{n}_y |n_x, n_y\rangle = n_y |n_x, n_y\rangle$$

$$H = (\hat{n}_x + \hat{n}_y + 1) \hbar \omega$$

$$H |n_x, n_y\rangle = \{ \hat{n}_x |n_x, n_y\rangle + \hat{n}_y |n_x, n_y\rangle + |n_x, n_y\rangle \} \hbar \omega$$

$$= (n_x + n_y + 1) \hbar \omega |n_x, n_y\rangle$$

$$= E_{n_x, n_y} |n_x, n_y\rangle$$

$$\boxed{n_x + n_y = n}$$

↳ valeur propre de H.

b) Niveaux d'énergie des 3 premiers niveaux et leur dégénérescence

* 1^{er} niveau $\Rightarrow$ il ne peut correspondre qu'aux valeurs

$$n_x = 0, n_y = 0, \text{ c'est à dire } n = 0$$

$$E_{0,0} = E_1 = \hbar \omega \text{ niveau simple non dégénéré } \text{ket correspondant } |0,0\rangle$$

2^d niveau

$$n=1 \longrightarrow \begin{cases} n_x = 1, n_y = 0 \\ n_x = 0, n_y = 1 \end{cases}$$

$$E_{1,0} = E_{0,1} = E_2 = 2\hbar\omega$$

niveau 2 fois dégénéré, les kets correspondants $|1,0\rangle$ et $|0,1\rangle$

3^{ème} niveau

$$n=2 \Rightarrow \begin{cases} n_x = 2, n_y = 0 \\ n_x = 1, n_y = 1 \\ n_x = 0, n_y = 2 \end{cases}$$

$$E_{2,0} = E_{1,1} = E_{0,2} = E_3 = 3\hbar\omega \text{ niveaux 3 fois dégénérés}$$

kets propres correspondants: $|2,0\rangle, |1,1\rangle$ et $|0,2\rangle$

c) $\dim \mathcal{H}_z = N_x$, $\dim \mathcal{H}_y = N_y$

$\{H\}$ ne forme pas un ECOC à lui seul, car les niveaux d'énergie sont dégénérés

$\{\tilde{H}_x\}$ non ECOC car chacun de ses kets est N_y fois dégénéré

$\{\tilde{H}_y\}$ non ECOC car chacun de ses kets est N_x fois dégénéré

$\{H, \tilde{H}_x\}$ ECOC car fixer n_x revient à fixer 1 seule valeur de $n_y \Rightarrow$ on aura un seul ket $|n_x, n_y\rangle$ unique
 $[H, \tilde{H}_x] = 0$

Remarque: même raisonnement pour $\{H, \tilde{H}_y\}$

Exemple $n = 3$ et $n_x = 1 \Rightarrow n_y = 2 = n - n_x$

et le ket propre unique correspondant

et $|1,2\rangle$ de valeur propre 4 $\hbar \omega$ il est de même pour tout choix de $\{n, n_x\}$

④ Relation d'orthogonalisation (RO)

Relation de fermeture (RF)

$$\langle n_p, n_p | n'_q, n'_p \rangle = \langle n_q | n'_q \rangle \cdot \langle n_p | n'_p \rangle = \delta_{n_q, n'_q} \cdot \delta_{n_p, n'_p}$$

$$RF \rightarrow \sum_{n_q} |n_q\rangle \langle n_q| = 1$$

$$2 \text{ dimensions} \rightarrow \sum_{n_q, n_p} |n_q, n_p\rangle \langle n_q, n_p| = \sum_{n_q} \underbrace{|n_q\rangle \langle n_q|}_1 \cdot \sum_{n_p} \underbrace{|n_p\rangle \langle n_p|}_1 = 1$$

A) 2-

$$(a) \quad X = \beta (a_x^\dagger + a_x) \quad Y = \beta (a_y^\dagger + a_y)$$

$$(\tilde{X})^2 |n_x, n_y\rangle = (X^2 |n_x\rangle) \otimes |n_y\rangle$$

$$X^2 = \beta^2 (a_x^\dagger + a_x)(a_x^\dagger + a_x) = \beta^2 \left[(a_x^\dagger)^2 + (a_x)^2 + a_x^\dagger a_x + a_x a_x^\dagger \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [a_x, a_x^\dagger] = 1 \\ a_x a_x^\dagger = a_x^\dagger a_x + 1 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} a_x a_x^\dagger = a_x^\dagger a_x + 1 \\ = N_x + 1 \end{array} \right\} \quad \text{ne commute pas}$$

$$X^2 = \beta^2 \left[(a_x^\dagger)^2 + (a_x)^2 + N_x + N_x + 1 \right]$$

$$(a_x^\dagger)^2 |n_x\rangle = \sqrt{n_x+1} \sqrt{n_x+2} |n_x+2\rangle$$

$$(a_x)^2 |n_x\rangle = \sqrt{n_x} \sqrt{n_x-1} |n_x-2\rangle$$

$$(2N_x + 1) |n_x\rangle = (2n_x + 1) |n_x\rangle$$

$$\tilde{X}^2 |n_x, n_y\rangle = \beta^2 \left[\sqrt{n_x+1} \sqrt{n_x+2} |n_x+2, n_y\rangle + \sqrt{n_x} \sqrt{n_x-1} |n_x-2, n_y\rangle + (2n_x+1) |n_x, n_y\rangle \right]$$

$$\Rightarrow \langle n_x, n_y | \tilde{X}^2 |n_x, n_y\rangle = \beta^2 (2n_x+1) \quad \text{car} \quad \langle n_x | a_x^2 | n_x \pm 2 \rangle = 0$$

$$\text{et} \quad \langle n_x | n_x \rangle = \langle n_y | n_y \rangle = 1$$

Remarque:

$$\langle (\tilde{Y})^2 \rangle = \beta^2 (2n_y + 1)$$

(b) Mêmes questions pour l'observable $\tilde{X}\tilde{Y}$

$$\tilde{X}\tilde{Y} |n_x, n_y\rangle = (X |n_x\rangle) \otimes (Y |n_y\rangle)$$

actions de X sur $|n_x\rangle$

$$X |n_x\rangle = \beta (a_x^\dagger + a_x) |n_x\rangle$$

$$= \beta \left[\sqrt{n_x+1} |n_x+1\rangle + \sqrt{n_x} |n_x-1\rangle \right]$$

$$Y |n_y\rangle = \beta \left[\sqrt{n_y+1} |n_y+1\rangle + \sqrt{n_y} |n_y-1\rangle \right]$$

$$\begin{aligned} \tilde{X} \tilde{Y} |n_x, n_y\rangle &= \beta^2 [\sqrt{n_x+1} |n_x+1\rangle + \sqrt{n_x} |n_x-1\rangle] \\ (X|m_x\rangle) \otimes (Y|m_y\rangle) &= + [\sqrt{n_y+1} |n_y+1\rangle + \sqrt{n_y} |n_y-1\rangle] \\ &= \beta^2 [\sqrt{n_x+1} \sqrt{n_y+1} |n_x+1, n_y+1\rangle + \sqrt{n_x+1} \sqrt{n_y} |n_x+1, n_y-1\rangle \\ &\quad + \sqrt{n_x} \sqrt{n_y+1} |n_x-1, n_y+1\rangle + \sqrt{n_x} \sqrt{n_y} |n_x-1, n_y-1\rangle] \\ \langle \tilde{X} \tilde{Y} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

c) ELOC, pour un O.H à 2 dimensions :

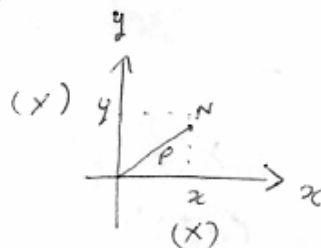
$$H(p, p) = \frac{1}{2M} p^2 + \frac{1}{2} \pi \omega^2 \int_{op}^2$$

$$\text{or } p^2 = x^2 + y^2 \rightarrow p^2 \cdot p = x^2 + y^2$$

$$p^2 = p_x^2 + p_y^2 \rightarrow p^2 = p_x^2 + p_y^2$$

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2M} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} \pi \omega^2 (x^2 + y^2) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2M} p_x^2 + \frac{1}{2} \pi \omega^2 x^2}_{H_x} + \underbrace{\frac{1}{2M} p_y^2 + \frac{1}{2} \pi \omega^2 y^2}_{H_y} \end{aligned}$$

$$H = H_x + H_y$$



$$\begin{aligned} \textcircled{2} \quad a_\mu &= \sqrt{\frac{\alpha}{2}} R_\mu + \frac{i}{\hbar \sqrt{2\alpha}} P_\mu \\ a_\mu^\dagger &= \sqrt{\frac{\alpha}{2}} R_\mu - \frac{i}{\hbar \sqrt{2\alpha}} P_\mu \end{aligned} \quad \begin{cases} \mu = x, y \\ R_\mu = X & \text{si } \mu = x \\ R_\mu = Y & \text{si } \mu = y \end{cases}$$

$$\text{de même } \begin{cases} P_\mu = P_x & \text{si } \mu = x \\ P_\mu = P_y & \text{si } \mu = y \end{cases}$$

$$a_x = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} X + \frac{i}{\hbar \sqrt{2\alpha}} P_x$$

$$a_x^\dagger = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} X - \frac{i}{\hbar \sqrt{2\alpha}} P_x$$

de même pour a_y et $a_y^\dagger$

$$a_x + a_x^\dagger = 2 \sqrt{\frac{\alpha}{2}} X$$

$$\Rightarrow X = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} (a_x + a_x^\dagger)$$

or on dit

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} (a_y + a_y^\dagger)$$

$$a_x - a_x^\dagger = \frac{2i}{\hbar \sqrt{2\lambda}} p_x$$

$$\Rightarrow p_x = \frac{\hbar}{i} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (a_x - a_x^\dagger)$$

on en déduit $p_y = \frac{\hbar}{i} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (a_y - a_y^\dagger)$

$$x^2 = \frac{1}{2\lambda} [(a_x^\dagger)^2 + a_x^2 + 2N_x + 1]$$

$$y^2 = \frac{1}{2\lambda} [(a_y^\dagger)^2 + a_y^2 + 2N_y + 1]$$

$$p_x^2 = -\frac{\hbar^2 \lambda}{2} [(a_x^\dagger)^2 + a_x^2 - 2N_x - 1]$$

$$p_y^2 = -\frac{\hbar^2 \lambda}{2} [(a_y^\dagger)^2 + a_y^2 - 2N_y - 1]$$

$$H = \frac{1}{2M} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2} M \omega^2 (x^2 + y^2)$$

$$= \frac{1}{2M} \frac{\hbar^2 \lambda}{2} \frac{M\omega}{\hbar} [(a_x^\dagger)^2 + a_x^2 - 2N_x - 1 + (a_y^\dagger)^2 + a_y^2 - 2N_y - 1] + \frac{1}{2} M \omega^2 (x^2 + y^2)$$

$$= -\frac{\hbar \omega}{4} [a_x^{\dagger 2} + a_x^2 - 2N_x - 1 + a_y^{\dagger 2} + a_y^2 - 2N_y - 1] + \frac{1}{2} M \omega^2 \frac{1}{2} \frac{\hbar}{M\omega} [(a_x^\dagger)^2 + a_x^2 + 2N_x + 1 + (a_y^\dagger)^2 + a_y^2 + 2N_y + 1]$$

$\frac{\hbar \omega}{4}$

$$\Rightarrow H = (4N_x + 4N_y + 4) \frac{\hbar \omega}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{H = \hbar \omega (N_x + N_y + 1)}$$

$|\phi_{n_x}\rangle$ état propre de H_x dans $\mathcal{E}_x$

$|\phi_{n_y}\rangle$ " " " H_y " $\mathcal{E}_y$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_y$$

$$\begin{cases} \dim \mathcal{E}_x = N_x \\ \dim \mathcal{E}_y = N_y \end{cases}$$

$\{\tilde{H}_x\}$ ECOC?

on note $|\phi_{n_x, n_y}\rangle = |\phi_{n_x}\rangle \otimes |\phi_{n_y}\rangle$

les kets propres de H dans $\mathcal{E}$

Soit $|\phi_{n_x}\rangle$ un état propre de $\tilde{H}_x$ dans $\mathcal{E}$

à E_{n_x} valeur propre de H_x correspondante n_y kets dans $\mathcal{E}$

$$\Rightarrow |\phi_{n_x, 0}\rangle, |\phi_{n_x, 1}\rangle, \dots, |\phi_{n_x, n_y}\rangle, \dots$$

ont tous la même valeur propre de l'énergie E_{n_x}

Conclusion

- $\{\tilde{H}_x\}$ ne forme pas un ECOC

- même raisonnement pour $\{\tilde{H}_y\}$

$$E_x: n_x=0, n_y=0, n_x=0 \quad E_1 = \hbar\omega \text{ (simple)} \quad |\phi_{0,0}\rangle$$

$$n=1 \quad \begin{cases} n_x=1, n_y=0 \\ n_x=0, n_y=1 \end{cases} \quad E_2 = E_{1,0} = E_{0,1} = 2\hbar\omega \quad (|\phi_{1,0}\rangle, |\phi_{0,1}\rangle)$$

$\{H\}$ ECOC?

$$H = H_x + H_y = (N_x + N_y + 1) \hbar\omega$$

$$E_{n_x, n_y} = E_n = (n+1) \hbar\omega \quad n+1 \text{ fois dégénérée}$$

$\Rightarrow \{H\}$ ne forme pas un ECOC

$\{H, \tilde{H}_x\}$ ECOC?

Si on donne la paire (n, n_x)

$\Rightarrow$ cela détermine $n_y = n - n_x$ de façon unique

à la paire (n, n_x) correspond un ket unique $\Rightarrow \{H, \tilde{H}_x\}$ ECOC

Exemple: $(n=3, n_x=1) \quad n_y=3-1=2 \rightarrow |\phi_{n_x=1, n_y=2}\rangle$ unique

même pour $\{H, \tilde{H}_y\}$:

qui lui aussi forme un ECOC.

7.18
Série 1
Ex: 9

⑥

6-3

a/

$$L_z = X P_y - Y P_x$$

$$\vec{L} = \vec{R} \wedge \vec{P}$$

$$(L_x = Y P_z - Z P_y, L_y = Z P_x - X P_z)$$

$$X P_x = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \frac{\hbar}{i} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (a_y + a_y^\dagger) (a_x - a_x^\dagger)$$

Rappel:

$$L_z = i \hbar (a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y)$$

$$X = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} (a_x + a_x^\dagger), P_x = \frac{\hbar}{i} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (a_x - a_x^\dagger)$$

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} (a_y + a_y^\dagger), P_y = \frac{\hbar}{i} \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (a_y - a_y^\dagger)$$

$$L_z = X P_y - Y P_x = \frac{\hbar}{2i} (a_x^\dagger + a_x)(a_y - a_y^\dagger) - (a_y + a_y^\dagger)(a_x - a_x^\dagger)$$

$$= \frac{\hbar}{2i} \{ a_x a_y - a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y - [a_y^\dagger a_x - a_y a_x^\dagger + a_y^\dagger a_x - a_y^\dagger a_x^\dagger] \}$$

$$L_z = \frac{\hbar}{2i} \{ [a_x a_y] - [a_x^\dagger, a_y^\dagger] - 2a_x a_y^\dagger + 2a_x^\dagger a_y \}$$

$$[a_\mu, a_\nu] = 0$$

$$[a_\mu^\dagger, a_\nu^\dagger] = 0$$

$$[a_\mu, a_\nu^\dagger] = \delta_{\mu\nu} \mathbb{I}$$

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \{ -a_x a_y^\dagger + a_x^\dagger a_y \}$$

$$L_z = i \hbar \{ a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y \}$$

2.b) $[H, L_z] = ?$

$$[H, L_z] = i \hbar \omega [N_x + N_y + \mathbb{I}, a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y]$$

$$= i \hbar \omega \{ [N_x, a_x a_y^\dagger] - [N_x, a_x^\dagger a_y] + [N_y, a_x a_y^\dagger] - [N_y, a_x^\dagger a_y] \}$$

$$\text{car } [N, a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y] = 0;$$

$$\text{com 1} = [N_x, a_x a_y^\dagger]$$

$$= [a_x^\dagger a_x, a_x] a_y^\dagger = \{ a_x^\dagger a_x a_x - a_x a_x^\dagger a_x \} a_y^\dagger \\ = [a_x^\dagger, a_x] a_x a_y^\dagger \\ = -a_x a_y^\dagger$$

$$\text{com 2} = [N_x, a_x^\dagger a_y] = [N_x, a_x^\dagger] a_y = (a_x^\dagger a_y a_x^\dagger - a_x^\dagger a_x^\dagger a_x) a_y \\ = a_x^\dagger [a_x, a_x^\dagger] a_y = a_x^\dagger a_y$$

$$\text{com 3} = [N_y, a_x a_y^\dagger] = a_x [N_y, a_y^\dagger] = a_x a_y^\dagger$$

$$\text{com 4} = [N_y, a_y^\dagger] a_x^\dagger = -a_y a_x^\dagger$$

$$\Rightarrow [H, L_3] = i\hbar\omega \{ -a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y + a_y^\dagger a_x + a_y a_x^\dagger \}$$

$$[H, L_3] = 0$$

④ Pour trouver les Kets communs et les valeurs propres respectives de H et L_3 on introduit

$$D = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x - i a_y) \rightarrow D^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^\dagger + i a_y^\dagger)$$

$$G = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x + i a_y) \rightarrow G^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_x^\dagger - i a_y^\dagger)$$

$$\text{Si } [D, D^\dagger] = [G, G^\dagger] = \mathbb{1}$$

$\Rightarrow N_D$ est l'opérateur nombre associé à la valeur propre $n_D \geq 0$

De même pour $N_G = G^\dagger G$ associée à la valeur propre n_G ($n_G \geq 0$)

$$[D, D^\dagger] = \frac{1}{2} [a_x - i a_y, a_x^\dagger + i a_y^\dagger] = \frac{1}{2} \{ [a_x, a_x^\dagger] + [a_y, a_y^\dagger] - i [a_x^\dagger, a_y] + i [a_x, a_y^\dagger] \} \\ = \frac{1}{2} \times 2 \mathbb{1} \Rightarrow [D, D^\dagger] = \mathbb{1}$$

de même, on a $[G, G^\dagger] = \mathbb{1}$.

a) $N_D = D^\dagger D$ a pour valeur propres les entiers $n_D \geq 0$
 $N_G = G^\dagger G$ a pour valeur propres les entiers $n_G \geq 0$

$$\text{b) } N_D + N_G = D^\dagger D + G^\dagger G = \frac{1}{2} [(a_x^\dagger + i a_y^\dagger)(a_x - i a_y) + (a_x^\dagger - i a_y^\dagger)(a_x + i a_y)] \\ = \frac{1}{2} [a_x^\dagger a_x - i a_x^\dagger a_y + i a_y^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y + a_x^\dagger a_x + i a_x^\dagger a_y - i a_y^\dagger a_x + a_y^\dagger a_y]$$

$$N_D + N_G = N_x + N_y$$

$$H = (N_x + N_y) \hbar \omega + i \hbar \omega \mathbb{1}$$

$$N_x + N_y = \frac{H}{\hbar \omega} - \mathbb{1} = N_D + N_G$$

$$* N_D - N_G = -2i (a_x^\dagger a_y - a_x a_y^\dagger)$$

$$= i [a_x a_y^\dagger - a_x^\dagger a_y]$$

$$= \frac{L_z}{\hbar} \Rightarrow$$

$$\textcircled{1} \quad N_D + N_G = \frac{H}{\hbar \omega} - \mathbb{1} \quad \textcircled{2}, \quad N_D - N_G = \frac{L_z}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (N_D + N_G + \mathbb{1}) \hbar \omega = H \\ (N_D - N_G) \hbar = L_z \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Les valeurs propres de H sont les entiers ≥ 1 correspondant à
Les valeurs propres de L_z sont $\leq$ ou ≥ 0 (multiples de $\hbar$)

$$\begin{aligned} b) \quad H |n_D, n_G\rangle &= (N_D + N_G + \mathbb{1}) \hbar \omega |n_D, n_G\rangle \\ &= [(N_D |n_D\rangle \otimes |n_G\rangle + |n_D\rangle \otimes (N_G |n_G\rangle + |n_D, n_G\rangle)] \hbar \omega \\ &= (n_D + n_G + 1) \hbar \omega |n_D, n_G\rangle \end{aligned}$$

$$\text{De même } (N_D - N_G) \hbar |n_D, n_G\rangle = (n_D - n_G) \hbar |n_D, n_G\rangle$$

$|n_D, n_G\rangle$ état propres communs à H et L_z de valeurs propres respectives $(n_D + n_G + 1) \hbar \omega$ et $(n_D - n_G) \hbar$.

$$\textcircled{5} \quad a. \quad m = n_D - n_G, \quad n = n_D + n_G$$

n	n_D	n_G	m
0	0	0	0 — valeur simple $\hbar \omega$
1	$\begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases} \quad 2\hbar \omega$
2	$\begin{cases} 2 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$	$\begin{cases} 2 \\ 0 \\ -2 \end{cases} \quad 3\hbar \omega$
3	$\begin{cases} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 3 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{cases} \quad 4\hbar \omega$

H est $(n+1)$ fois dégénérée
 L_z aussi

b) $m = n_0 - n_G$

$n = n_0 + n_G \Rightarrow -m + n = 2n_G \Rightarrow \boxed{m = n - 2n_G}$

les valeurs propres que peut prendre L_3 sont

$n\hbar, (n-2)\hbar, (n-4)\hbar, \dots, (-n+4)\hbar, (-n+2)\hbar, -n\hbar$

* $[H, L_3] = 0$

n	n_D	n_G	m	H	L_3
0	0	0	0	$\hbar\omega$	0
1	1	0	1	$2\hbar\omega$	$\hbar$
	0	1	-1	$2\hbar\omega$	$-\hbar$
2	2	0	2	$3\hbar\omega$	$2\hbar$
	1	1	0	$3\hbar\omega$	0
	0	2	-2	$3\hbar\omega$	$-2\hbar$

Aucune ligne n'étant identique

$\Rightarrow \{H, L_3\}$ forme un EOC.

Série N° 2

Exercice I

B -

1)

$$J_z |j, m\rangle = m\hbar |j, m\rangle$$

$$-j \leq m \leq j$$

car

$$J_+ = J_x + i J_y$$

$$J_- = J_x - i J_y$$

$$\Rightarrow J_x = \frac{1}{2} (J_+ + J_-)$$

$$J_y = \frac{1}{2i} (J_+ - J_-)$$

$$J_{\pm} |j, m\rangle = C_{\pm}(j, m) |j, m \pm 1\rangle$$

$$C_{\pm}(j, m) = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m \pm 1)}$$

$$J_+ |j, m\rangle = C_+(j, m) |j, m+1\rangle$$

$$J_- |j, m\rangle = C_-(j, m) |j, m-1\rangle$$

$$\langle J_x \rangle = \langle m | J_x | j, m \rangle = 0$$

$$\text{de même pour } \langle J_y \rangle \Rightarrow \langle j, m | J_y | j, m \rangle = 0$$

$$\Rightarrow J_x^2 |j, m\rangle = J_x J_x |j, m\rangle$$

$$= \frac{1}{2} J_x \{ C_+ C_+(j, m) |j, m+1\rangle + C_- C_-(j, m) |j, m-1\rangle \}$$

$$J_x |j, m+1\rangle = \frac{1}{2} \{ C_+ (m+1) |j, m+2\rangle + C_- (j, m+1) |j, m\rangle \}$$

$$J_x |j, m-1\rangle = \frac{1}{2} \{ C_+ C_+(j, m) |j, m\rangle + C_- (j, m-1) |j, m-2\rangle \}$$

$$\langle j, m | J_x^2 | j, m \rangle = \frac{1}{4} \{ C_+(j, m) C_-(j, m+1) + C_-(j, m) C_+(j, m-1) \}$$

$$= \frac{\hbar^2}{4} \{ \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} \sqrt{j(j+1) - (m+1)m} + \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} \sqrt{j(j+1) - (m-1)m} \}$$

$$= \frac{1}{4} \{ j(j+1) - m(m+1) + j(j+1) - m(m-1) \}$$

$$= \frac{1}{4} \{ 2j(j+1) - m^2 - m - m^2 + m \}$$

$$\boxed{\langle j, m | J_x^2 | j, m \rangle = \frac{\hbar^2}{2} [j(j+1) - m^2]}$$

on montre de même que

$$\begin{aligned} \langle j, m | J_y^2 | j, m \rangle &= \frac{1}{4} \left\{ -C_+(j, m) C_-(j, m-1) \right. \\ &\quad \left. - C_-(j, m) C_+(j, m+1) \right\} \\ &= \frac{\hbar^2}{2} \{ j(j+1) - m^2 \} \quad (\text{à vérifier}) \end{aligned}$$

$$\langle \vec{J}^2 \rangle = \langle J_x^2 \rangle + \langle J_y^2 \rangle + \langle J_z^2 \rangle //$$

$$\Rightarrow \langle J_x^2 \rangle + \langle J_y^2 \rangle = \langle \vec{J}^2 \rangle - \langle J_z^2 \rangle //$$

$$\begin{aligned} \langle J_x^2 \rangle + \langle J_y^2 \rangle &= \frac{1}{2} \{ 2C_+(j+1) \hbar^2 - 2m^2 \hbar^2 \} \\ &= j(j-1) \hbar^2 - m^2 \hbar^2 \end{aligned}$$

$$\langle \vec{J}^2 \rangle = \langle J_z^2 \rangle = j(j+1) \hbar^2 - m^2 \hbar^2 \quad (\text{calculs vérifiés})$$

2. a) Valeur propres et Kets propres de J^2 , J_z et vérifions que les Kets propres correspondants.

forment une base orthonormée complète

$$j=1, \quad -1 \leq m \leq 1$$

Les Kets propres sont $|1, 1\rangle, |1, 0\rangle, |1, -1\rangle$

$$J^2 |1, m\rangle = 2\hbar^2 |1, m\rangle \quad -1 \leq m \leq 1$$

$$J_z |1, m\rangle = m\hbar |1, m\rangle$$

On note souvent :

$$1 \times 3 \times 3 \times 1 = 1 \text{ scalaire}$$

$$|1, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle 1, 1 | 1, 1 \rangle = (1, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$|1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle 1, 0 | 1, 0 \rangle = (0, 1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$|1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle 1, -1 | 1, -1 \rangle = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow \langle 1, -1 | 1, 0 \rangle = (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

De même pour les autres produits :

Relation de fermeture:

$$\sum_{m=1} \langle 1, m | \langle 1, m | = \mathbb{I}_3$$

$$= |1, -1\rangle \langle 1, -1| + |1, 0\rangle \langle 1, 0| + |1, 1\rangle \langle 1, 1|$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}_3$$

Représentation matricielle des opérateurs $\vec{J}^2, J_3, J_{\pm}, J_x, J_y$

$$\langle 1, m | \vec{J}^2 | 1, m \rangle = 2\hbar^2 \delta_{m,m}$$

matrice diagonale

$$\Rightarrow (J^2) = \begin{pmatrix} \langle 1, 1 | J^2 | 1, 1 \rangle & \langle 1, 1 | J^2 | 1, 0 \rangle & \langle 1, 1 | J^2 | 1, -1 \rangle \\ \langle 1, 0 | J^2 | 1, 1 \rangle & \langle 1, 0 | J^2 | 1, 0 \rangle & \langle 1, 0 | J^2 | 1, -1 \rangle \\ \langle 1, -1 | J^2 | 1, 1 \rangle & \langle 1, -1 | J^2 | 1, 0 \rangle & \langle 1, -1 | J^2 | 1, -1 \rangle \end{pmatrix} = 2\hbar^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(J^2) = 2\hbar^2 \mathbb{I}_3$$

$$\langle j, m' | J_3 | j, m \rangle = m \hbar \delta_{m', m} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifions que les kets (écrit sous forme matricielle)

Vérifient les bonnes équations aux valeurs propres.

$$(J_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\hbar \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De même pour les autres. $= -\hbar |1, -1\rangle$

$$\langle j, m' | J_{\pm} | j, m \rangle = C_{\pm}(j, m) \delta_{m', m \pm 1}$$

$$(J_{+}) = \begin{pmatrix} \langle 1, 1 | J_{+} | 1, 1 \rangle & \langle 1, 1 | J_{+} | 1, 0 \rangle & \langle 1, 1 | J_{+} | 1, -1 \rangle \\ \langle 1, 0 | J_{+} | 1, 1 \rangle & \langle 1, 0 | J_{+} | 1, 0 \rangle & \langle 1, 0 | J_{+} | 1, -1 \rangle \\ \langle 1, -1 | J_{+} | 1, 1 \rangle & \langle 1, -1 | J_{+} | 1, 0 \rangle & \langle 1, -1 | J_{+} | 1, -1 \rangle \end{pmatrix}$$

$$(J_{+}) = \hbar \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

étant donné que $(J_-) = (J_+)^+$

$(J_-)_{ij} = (J_+)^*_{ji} = (J_+)_{ji}$ car les éléments de matrice de J_+ sont réels

$$J_- = \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_x = \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_y = \frac{1}{2i}(J_+ - J_-) = \frac{1}{2i} \hbar\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

pour les opérateurs

$$[J_x, J_y] = i\hbar J_z$$

$$[J_y, J_z] = i\hbar J_x$$

$$[J_z, J_x] = i\hbar J_y$$

Questions A-t-on le même résultat pour la représentation

matricielles $(J_x), (J_y), (J_z)$

$$[(J_x), (J_y)] = i\hbar(J_z)$$

$$(J_x)(J_y) = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} i & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & i \end{pmatrix}$$

$$(J_y)(J_x) = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar^2}{2} \begin{pmatrix} -i & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$(J_x)(J_y) - (J_y)(J_x) = \frac{\hbar^2}{2}$$

Lecture de la table qui donne les coefficients de C.G

Cas particulier: $j_1 = j_2 = 1$

$$|2,2\rangle = |1,1\rangle = 1 \cdot |j_1=1, m_1=1\rangle \otimes |j_2=1, m_2=1\rangle$$

$$\text{Donc } \langle 11 | 22 \rangle = 1$$

$$|2,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1,0\rangle + |0,1\rangle \}$$

$$\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1,1\rangle \otimes |1,0\rangle + |1,0\rangle \otimes |1,1\rangle \}$$

$$\langle 1,0 | 2,1 \rangle = \langle 0,1 | 2,1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1,0\rangle - |0,1\rangle \}$$

$$|2,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} |1,-1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |0,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}} |-1,1\rangle$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1,-1\rangle - |-1,1\rangle \}$$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ |1,-1\rangle - |0,0\rangle + |-1,1\rangle \}$$

$$|2,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |0,-1\rangle + |-1,0\rangle \}$$

$$|1,-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |0,-1\rangle - |-1,0\rangle \}$$

$$|2,-2\rangle = |-1,-1\rangle$$

Exo III - B : Page 47

3) valeurs moyennes

le système est préparé dans l'état

$$|+\rangle_u = \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} |-\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \Rightarrow \langle + | = \left(\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2}, \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \right)$$

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{vecteurs propres}$$

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{communs à } S^2 \text{ et } S_z$$

$$\begin{aligned} S_x |+\rangle_u &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{-i\varphi/2} \\ \sin \theta/2 e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \sin \theta/2 e^{i\varphi/2} \\ \cos \theta/2 e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle + | S_x | + \rangle &= \frac{\hbar}{2} \cos \theta/2 \sin \theta/2 (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) \\ &= \frac{\hbar}{2} 2 \cos \theta/2 \sin \theta/2 \cdot \cos \varphi = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \cos \varphi \end{aligned}$$

on montre de même que :

$$\begin{cases} \langle + | S_y | + \rangle_u = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \sin \varphi \\ \langle + | S_z | + \rangle_u = \frac{\hbar}{2} \cos \theta \end{cases}$$

$$4) \quad H = -\vec{M} \cdot \vec{B}_0 = -\gamma S_z B_0 = -\gamma B_0 S_z = \omega_0 S_z$$

$$H |+\rangle = \frac{\hbar \omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar \omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\hbar \omega_0}{2} |+\rangle$$

$$H |-\rangle = \frac{\hbar \omega_0}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\hbar \omega_0}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\hbar \omega_0}{2} |-\rangle$$

$|+\rangle$ et $|-\rangle$ sont propres de H de valeurs propres respectives $+\frac{\hbar \omega_0}{2}$ et $-\frac{\hbar \omega_0}{2}$

et alternent à $t=0$.

$$b) \quad |X(t=0)\rangle = |+\rangle_u$$

$$|X(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar} |X(t=0)\rangle$$

$$e^{-iHt/\hbar} |+\rangle = e^{-i\omega_0 t/2} |+\rangle$$

$$e^{-iHt/\hbar} |-\rangle = e^{+i\omega_0 t/2} |-\rangle$$

$$|X(t)\rangle = \cos \theta/2 e^{i\varphi/2} e^{-i\omega_0 t/2} |+\rangle + \sin \theta/2 e^{-i\varphi/2} e^{i\omega_0 t/2} |-\rangle$$

$$= \cos \frac{\theta}{2} e^{-i(\varphi + \omega_0 t)/2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi + \omega_0 t)/2} |-\rangle$$

$$\langle x(t) | S_x | x(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \cos \varphi(t)$$

$$\langle x(t) | S_y | x(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \theta \sin \varphi(t)$$

$$\langle x(t) | S_z | x(t) \rangle = \frac{\hbar}{2} \cos \theta$$

$$\langle S_z \rangle = \omega t \text{ du mouvement}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{i\varphi(t)} & \sin \theta/2 e^{-i\varphi(t)} \\ \sin \theta/2 e^{i\varphi(t)} & -\cos \theta/2 e^{-i\varphi(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{-i\varphi(t)} \\ \sin \theta/2 e^{i\varphi(t)} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{i\varphi(t)} & \sin \theta/2 e^{-i\varphi(t)} \\ \sin \theta/2 e^{i\varphi(t)} & -\cos \theta/2 e^{-i\varphi(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{-i\varphi(t)} \\ -\sin \theta/2 e^{i\varphi(t)} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{2} \cos \theta$$

$$|x(t)\rangle = \cos \theta/2 e^{-i\varphi/2} e^{-i\omega_0 t/2} |+\rangle + \sin \theta/2 e^{i\varphi/2} e^{i\omega_0 t/2} |-\rangle$$

$$= \cos \theta/2 e^{-i(\varphi+\omega_0 t)/2} |+\rangle + \sin \theta/2 e^{i(\varphi+\omega_0 t)/2} |-\rangle$$

$$|x(t)\rangle = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{i\varphi/2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin \theta/2 e^{i\varphi/2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{-i\varphi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta/2 e^{-i\varphi/2} \\ \sin \theta/2 e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} = \cos(\varphi/2) \mathbb{I}_2 - i \sin \varphi/2 \sigma_3$$

$$= R(\alpha) |x(t=0)\rangle$$

Cas particulier

$$\alpha = 2\pi \quad R(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-i\pi} & 0 \\ 0 & e^{i\pi} \end{pmatrix} = -\mathbb{I}$$

$$|x(t)\rangle = -\mathbb{I} |x(t=0)\rangle = -|x(t=0)\rangle$$

$$\alpha = 4\pi \quad R(\alpha) = \begin{pmatrix} e^{-2i\pi} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi} \end{pmatrix} = \mathbb{I}_2$$

$$\Rightarrow |x(t)\rangle = |x(t=0)\rangle = R(\alpha) |x(t=0)\rangle$$

$\hookrightarrow$ propriété (on

Serie 3

(3)

5

Ex 1 p 70 Equation radiale.

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(r) G(\theta, \varphi) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vec{r} + V(r) = H(r)$$

$V(r) = V(\|\vec{r}\|)$: potentiel central $\rightarrow$ symétrie sphérique

$\Psi(r, t)$ doit être fonction propre de l'équation d'énergie

$$H \Psi = i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi$$

Puisque $H \neq H(t)$ on a $\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r}) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$ solution stationnaire

Puisque $V(r)$ central $\Psi(\vec{r})$ satisfait à

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \vec{r} + V(r) \Psi(r) = E \Psi(r)$$

$$\Delta \vec{r} = \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} \right]$$

on a aussi $\Psi(\vec{r}) = R(r) G(\theta, \varphi)$

$$\Rightarrow \left[\Delta \vec{r} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) \right] R G = 0$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} R G &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r R G) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} R G = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (R G + r R' G) - \frac{(L^2 G) R}{\hbar^2 r^2} \\ &= \frac{1}{r} (R' G + R' G + r G R'') - \frac{(L^2 G) R}{\hbar^2 r^2} \\ &= R'' G + \frac{2}{r} R' G - \frac{L^2 G R}{\hbar^2 r^2} = 0 \end{aligned}$$

$$G(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi)$$

λ , coefficient de séparation $\lambda = l(l+1)\hbar^2$

On peut simplifier par G

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{l(l+1)R}{r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) R = 0$$

$$\left(R'' + \frac{2}{r} R' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m r^2} \right) R = 0$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = R(r) Y_l^m(\theta, \varphi) e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \quad \begin{array}{l} \text{terme de barrière} \\ \text{centrifuge} \end{array}$$

$G(\theta, \varphi) = Y_l^m(\theta, \varphi)$ satisfait à

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2} + l(l+1) G = 0$$

A vérifier

$$R'' + \frac{2m}{\hbar^2} E R = 0$$

AC

$$R'' = -\frac{2m}{\hbar^2} E$$

$$R' = -\frac{2}{\hbar^2} E r$$

$$AC \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E} r$$

$$+ B e^{\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} E} r}$$

fonction d'onde radiale réduite.

$$R(r) = \frac{u(r)}{r} \Rightarrow u(r) = r R(r)$$

si R non singulière en $r=0$

$$u(r=0) = 0 \quad R(r=0) = 0$$

si $R(r) \rightarrow 0$ qd $r \rightarrow +\infty$

$$\Rightarrow u(r) \rightarrow 0$$

$$R'' = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{u'}{r} \right) = \frac{u''}{r} - \frac{u'}{r^2} - \frac{u'}{r^2} + \frac{2u}{r^3}$$

$$\frac{2}{r} R' = \frac{2}{r} \left(\frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2} \right) = \frac{2u'}{r^2} - \frac{2u}{r^3}$$

$$R'' + \frac{2}{r} R' = \frac{u''}{r} \rightarrow R'' + \frac{2}{r} R' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V(r)) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} R = 0$$

$$\Rightarrow \frac{u''}{r} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr} \right) \frac{u}{r} = 0$$

Etant donné la forme de l'équation on peut multiplier par r et on obtient

$$u'' + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr} \right) u = 0$$

$$V_{\text{eff}} = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}$$

$u'' + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_{\text{eff}}(r)) u = 0$ similaire à l'eq de Schrodinger
à une dimension dépend de la variable radiale r et
somme so au potentiel $V_{\text{eff}}(r)$

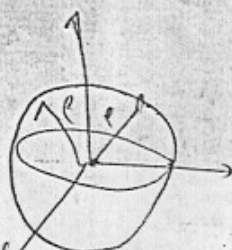
$$\int_0^{+\infty} R^2(r) r^2 dr \int d\Omega |Y_l^m|^2 = 1$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^2(r)}{r^2} r^2 dr = 1$$

si $u(r)$ réel

$$\int |u(r)|^2 dr = 1$$

$$\int dr u^2(r) = 1$$



$$V(r) = 0 \text{ si } r < r$$

$V(r) = \infty$ si $r > r$ la particule ne peut pas quitter la sphere

$$u(r=r) = 0 \quad R(r=r) = 0$$

$l=0$ $V(r)=0$ $r < \rho \Rightarrow$ l'éq devient

$$u''_0 + \frac{2mE}{\hbar^2} u_0 = 0 \quad \alpha^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} > 0$$

$$\Rightarrow u''_0 + \alpha^2 u_0 = 0 \Rightarrow u_0 = A \sin(\alpha r) + B \cos(\alpha r)$$

$$\text{or } u_0(r) = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$\text{et } u(r=\rho) = A \sin \alpha \rho = 0 \Rightarrow \alpha \rho = n\pi$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{n\pi}{\rho} \Rightarrow \alpha^2 = \frac{2mE_n}{\hbar^2} = \frac{n^2 \pi^2}{\rho^2} \Rightarrow E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2m\rho^2}$$

les énergies sont quantifiées

$$\begin{aligned} \text{Normalisation } \int u^2(r) dr &= A_0^2 \int_0^\rho \sin^2(\alpha_n r) dr \\ &= \frac{1}{2} A_0^2 \int_0^\rho (1 - \cos(2\alpha_n r)) dr \end{aligned}$$

$$\Rightarrow A_0 = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \quad = \frac{A_0^2}{2} \rho = 1$$

$$\psi_{n,0,0}(r, \theta, \varphi, t) = \sqrt{\frac{2}{\rho}} \cdot \frac{\sin(\alpha_n r)}{r} \underbrace{Y_0^0(\theta, \varphi)}_{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}} e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t}$$

Remarque si $l \neq 0$

$$u''_l + \left(\alpha^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) u_l = 0$$

$$u_l(r) = A r J_{l+1/2}(\alpha r)$$

$\hookrightarrow$ fonction de Bessel d'indice $1/2$ entier

4°)

$$\begin{aligned} \psi_{2,1,\pm 1}(\vec{r}) &= R_{2,1}(r) Y_1^{\pm 1}(\theta, \varphi) \\ &= \frac{r e^{-r/2a_0}}{\sqrt{24} a_0^5} Y_1^{\pm 1}(\theta, \varphi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int |\psi_{2,1,\pm 1}(\vec{r})|^2 d\vec{r} &= \int_0^{+\infty} dr r^2 \frac{r^2 e^{-r/a_0}}{4! a_0^5} \underbrace{\int d\Omega |Y_1^{\pm 1}|^2}_{1} \\ &= \int_0^{+\infty} dr \frac{r^4 e^{-r/a_0}}{4! a_0^5} = \frac{4!}{\left(\frac{4}{a_0}\right)^5} \cdot \frac{1}{4! a_0^5} = 1 \end{aligned}$$

$d\vec{r} = r^2 dr \underbrace{d\theta d\varphi}_{d\Omega}$

$$\langle r \rangle_{21,1\pm 1} = \frac{1}{T} \int_0^{+\infty} dr r^5 e^{-r/a_0} = \frac{1}{T} \frac{5!}{\left(\frac{1}{a_0}\right)^6}$$

$$= \frac{1}{4! a_0^5} 5! a_0^6$$

valeur la plus probable :

$$|R_{21}(r)|^2 = \rho_{21}(r) = \frac{1}{4 a_0^5} r^2 e^{-r/a_0}$$

$$\frac{d}{dr} \rho_{21}(r) = 0 \Rightarrow \left(2r - \frac{r^2}{a_0} \right) e^{-r/a_0} = 0$$

$$2a_0 - r^* = 0 \Rightarrow r^* = 2a_0$$

valeur la plus probable $\neq$ valeur moyenne en générale.

Essayons une fonction d'onde $\bar{\alpha}$ symétrique sphérique.

$$\Psi_{1,0,0}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{a_0^3}} e^{-r/a_0} Y_0^0(\theta, \varphi)$$

$$\langle r \rangle_{100} = \frac{4}{a_0^3} \int_0^{+\infty} dr r^2 e^{-2r/a_0} \times 1$$

$$= \frac{4}{a_0^3} \cdot \frac{3!}{\left(\frac{2}{a_0}\right)^3} = \frac{4}{a_0^3} \cdot \frac{6 a_0^4}{16} = \frac{3}{2} a_0$$

$$\frac{d\rho(r)}{dr} = \frac{d}{dr} \left(r^2 e^{-2r/a_0} \right) = \left(2r - \frac{2r^2}{a_0} \right) = 0 \Rightarrow 2a_0 - 2r^* = 0$$

$$r^* = a_0$$

T.D N°: 3

Exercice III . c :

Potentiel central. $V(r) = \frac{A}{r^2} + Br^2 \quad (A, B > 0)$

$$\nabla^2 V(r, t) \Rightarrow H \neq H(t)$$

Equation differentielle pour la fonction d'onde radiale $R(r)$

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \Rightarrow \langle \vec{r} | H | \psi \rangle = E \langle \vec{r} | \psi \rangle$$

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r})$$

$$\psi(\vec{r}) = V(r) \Rightarrow \psi(\vec{r}) = R(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{r^2} \right) R Y + V(r) R Y = E R Y$$

on simplifie par Y pour obtenir

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) R + (V(r) - E) R = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \right\} R(r) = 0$$

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{2mA}{\hbar^2} \right] - \frac{2mB}{\hbar^2} r^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} \} R(r) = 0$$

$$\lambda(\lambda+1) = \ell(\ell+1) + \frac{2mA}{\hbar^2}$$

λ n'est pas nécessairement entier.

$$\sigma = \frac{\sqrt{2mB}}{\hbar} \quad r \rightarrow q = r\sigma$$

$$\frac{d}{dr} = \frac{dq}{dr} \cdot \frac{d}{dq} = \sigma \frac{d}{dq}$$

$$\frac{d^2}{dr^2} = \sigma \frac{d^2}{dq^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} = \frac{1}{\left(\frac{q}{\sigma}\right)} \cdot \sigma \frac{d}{dq} = \sigma \frac{1}{q} \frac{d}{dq}$$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\left(\frac{q}{\sigma}\right)^2} = \frac{\sigma}{q^2}, \quad r^2 = \frac{q^2}{\sigma}$$

$$R(r) \rightarrow S(q)$$

$$\sigma \frac{d^2}{dq^2} + 2\sigma \frac{1}{q} \frac{d}{dq} - \frac{\lambda(\lambda+1)\sigma}{q^2} - \frac{2mB}{\hbar^2} \frac{q^2}{\sigma} + \frac{2mE}{\hbar^2} \} S(q) = 0$$

$$10 \left(\frac{d^2}{dq^2} + \frac{2}{q} \frac{dq}{dq} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{q^2} - \underbrace{\frac{2mB}{\hbar^2} \frac{1}{q^2}}_1 q^2 + \frac{2mE}{\hbar^2} \cdot \frac{1}{q} \right) S(q) = 0$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{2mB}}{\hbar}, \quad \sigma^2 = \frac{2mB}{\hbar^2}$$

on introduit $\epsilon = \frac{mE}{\hbar^2 \sigma} = \frac{E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2B}}$

$$\frac{2mE}{\hbar^2} \times \frac{\hbar}{\sqrt{2mB}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2mB}} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mB}} E \quad \epsilon = \frac{E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2B}}$$

$$\left(\frac{d^2}{dq^2} + \frac{2}{q} \frac{dq}{dq} - \frac{\lambda(\lambda+1)}{q^2} - q^2 + 2\epsilon \right) S(q) = 0$$

on passe à la variable $p = q^2$

Solution du type $S(p) \sim e^{-p/2} e^{\lambda/2} \phi(p)$

$\phi(p)$ satisfait à l'équation différentielle.

$$4p \frac{d^2}{dp^2} \phi + 4(\lambda-1-p) \frac{d\phi}{dp} + (2\epsilon-2\lambda-3) \phi = 0$$

on développe $\phi(p) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p^k$

$$\frac{d\phi}{dp} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^k p^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} (k+1) p^k$$

$$\text{En effet } \sum_{k=0}^{\infty} a_k^k p^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^k p^{k-1}$$

posons $p = k-1$, $k = p+1$

$$\sum_{p+1}^{\infty} a_{p+1}^{(p+1)} p^p$$

p indice muet
 k indice muet

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}^{(k+1)} p^k$$

$$p \frac{d\phi}{dp} = p \sum_{k=0}^{\infty} a_k^k p^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^k p^k \text{ laisse inchangé}$$

$$\frac{d^2 \phi}{dp^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^k k(k-1) p^{k-2}$$

$$p \frac{d^2 \phi}{dp^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^k k(k-1) p^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}^{(k+1)} k p^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 4k(k+1) a_{k+1} + 4(\lambda-1)(k+1) a_{k+1} - 4ka_k + (2\epsilon-2\lambda-3)a_k \right\} p^k = 0$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 4(k+1)[k+1-1] a_{k+1} + (2\epsilon-2\lambda-3-4k) a_k \right\} p^k = 0$$

Pour qu'une série entière s'annule, il faut que tous ses coefficients soit nuls $\forall k$.

→

$$a_{k+1} = \frac{4k + 2\lambda + 3 - 2\varepsilon}{4(k+1)(k+\lambda+1)} a_k$$

relation
de récurrence.

Si $k \gg 1$

$$a_{k+1} \sim \frac{4k}{4(k+1)k} a_k = \frac{1}{k+1} a_k \sim \frac{1}{k} a_k$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \sim \frac{1}{k} \quad k \gg 1$$

$$\exp(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^k \Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{(k+1)!} \quad k! \sim \frac{1}{k} \quad k \gg 1$$

Dans ce cas ϕ est de la forme

$$\phi(f) \sim e^{-f/\nu} f^{1/2} e^f$$

$$f^{1/2} f^{1/2} \text{ diverge quand } f \gg 1$$

Solution physiquement inacceptable

⇒ La série infinie doit se réduire à un polynôme de degré fini p

$$\phi(f) = \sum_{k=0}^p a_k f^k$$

$$\Rightarrow a_{p+1} = \frac{(4p + 2\lambda + 3 - 2\varepsilon)}{4(p+1)(p+\lambda+1)} a_p = 0$$

$$\boxed{4p + 2\lambda + 3 - 2\varepsilon = 0} \quad \text{quantification de l'énergie.}$$

$$2\varepsilon = 4p + 2\lambda + 3$$

$$\lambda(\lambda+1) = \ell(\ell+1) + \frac{2m A}{\hbar^2} = D$$

$$\lambda^2 + \lambda - D = 0$$

$$2\lambda_{\pm} = -1 \pm \sqrt{1+4D}$$

Seule λ_+ acceptable.

$$2\varepsilon = 4p + 2\lambda_+ + 3$$

$$= 4p + [-1 + \sqrt{1+4D}]$$

$$= 4p + 2 + \sqrt{1+4D}$$

$$\varepsilon = 2p + 1 + \sqrt{\frac{1}{4} + D}$$

$$\frac{E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2B}} = 2p + 1 + \sqrt{(\ell + \frac{1}{2})^2 + \frac{2m A}{\hbar^2}}$$

$$E_{p,\ell} = \hbar \sqrt{\frac{2B}{m}} \left\{ 2p + 1 + \sqrt{(\ell + \frac{1}{2})^2 + \frac{2m A}{\hbar^2}} \right\}$$

5) oscillateur harmonique à 3D

(12) $V(r) = \frac{A}{r^2} + B r^2$, OHL (3D) $A = 0$, $B = \frac{1}{2} m \omega^2$

$$\sqrt{\frac{2B}{m}} = \sqrt{\frac{2}{m} \cdot \frac{1}{2} m \omega^2} = \omega$$

$$E_{p,l} = \hbar \omega \left\{ 2p+1 + l + \frac{1}{2} \right\}$$

$$= \hbar \omega \left(n + \frac{3}{2} \right) \quad n = 2p + l \quad \text{entier}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Exercice II : P. 70

Potentiel moléculaire $V(r) = \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}$

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rR) + \frac{k(k+1)\hbar^2}{2m r^2} - \frac{B}{r} - E \right\} R(r) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rR) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (R + rR') = \frac{1}{r} (R' + R' + rR'') = R'' + \frac{2}{r} R'$$

$$k(k+1) - \ell(\ell+1) + \frac{2mA}{\hbar^2}$$

formellement identiquement à R pour l'hydrogène ($B_A = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$)
même comportement asymptotique.

$$E_H = -\frac{E_R}{r^2} \quad n-1-\ell = p > 0$$

$$E_H = \frac{-E_R'}{n^2} = \frac{-4E_R'}{(2n')^2} \quad n'-1-k=p.$$

$$n' = k+p+1$$

$$2n' = 2k+2p+2$$

$$k(k+1) = \ell(\ell+1) + \frac{2mA}{\hbar^2} = 0$$

$$k^2 + k - 0 = 0$$

$$2k_{\pm} = -1 \pm \sqrt{1+4D}$$

Seule $2k_+ = -1 + \sqrt{1+4D}$ acceptable.

$$= -1 + \sqrt{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2mA}{\hbar^2}}$$

$$2n' = -1 + \sqrt{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2mA}{\hbar^2}} + 2p + 2$$

$$2n' = 2p+1 + \sqrt{\left(\ell + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{2mA}{\hbar^2}}$$

$$E_L = \frac{m}{2} \left(\frac{\ell^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{\hbar^2}$$

$$E_H = \frac{m}{2} \frac{B^2}{\hbar^2}, \quad E_H = -4 \frac{m B^2}{2\hbar^2}$$

$$V_B = \frac{\hbar^2}{m_B}$$

$$\left(\text{Si } B = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow \frac{\hbar^2}{m} \cdot \frac{4\pi\epsilon_0}{e^2} = a_0 \right)$$

Fonction d'onde

$$R_{\ell,\ell}(r) = A_{n,\ell} r^k e^{-\sqrt{\lambda_{n,\ell}} r}$$

n' : pas nécessairement entiers

Série N°4

$H = H_0 + W \rightarrow$ hamiltonien de perturbation

$\hookrightarrow$ hamiltonien non perturbé

I.B p 85

$$W = \lambda X \quad (\lambda = -q \xi_0)$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \quad ; \quad d = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$E_n^{(0)} = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$$

Correction au 1^{er} ordre.

$$\begin{aligned} \lambda E_n^{(1)} &= \langle n | W | n \rangle \\ &= \lambda \langle n | X | n \rangle \\ &= \lambda d \langle n | (a^+ + a^-) | n \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda E_n^{(1)} = 0} \quad \text{Pas de correction au 1^{er} ordre.}$$

$$(\delta_{e,m})^2 = \delta_{e,m}$$

$$\lambda^2 E_n^{(2)} = \lambda^2 d^2 \sum_{p \neq n} \frac{|\langle n | (a^+ + a^-) | p \rangle|^2}{(n-p) \hbar \omega}$$

$$\langle n | X | p \rangle \langle p | X | n \rangle = d^2 \langle n | (a^+ + a^-) | p \rangle \langle p | (a^+ + a^-) | n \rangle$$

$$= d^2 \left\{ \sqrt{p+1} \delta_{n,p+1} + \sqrt{p} \delta_{n,p-1} \right\} \left\{ \sqrt{n+1} \delta_{p,n+1} + \sqrt{n} \delta_{p,n-1} \right\}$$

$$1) \quad \sqrt{p+1} \sqrt{n+1} \delta_{n,p+1} \cdot \delta_{p,n+1}$$

$$= \delta_{n-1,p} \cdot \delta_{p,n+1} = 0 \quad \text{contribution nulle.}$$

$$2) \quad \sqrt{p+1} \sqrt{n} \delta_{n,p+1} \cdot \delta_{p,n-1} = \sqrt{p+1} \sqrt{n} (\delta_{n,p+1})^2 \rightarrow \sqrt{p+1} \sqrt{n} \delta_{n,p+1}$$

$$3) \quad \sqrt{p} \sqrt{n+1} \delta_{n,p-1} \cdot \delta_{p,n+1} \Rightarrow \sqrt{p} \sqrt{n+1} (\delta_{n,p-1})^2 = \sqrt{p} \sqrt{n+1} \delta_{n,p-1}$$

contribution $\neq 0$

$$4) \sqrt{p} \sqrt{n} \delta_{n,p-1} \delta_{p,n-1}$$

$\sqrt{p} \sqrt{n} \delta_{n+1,p} \delta_{p,n-1} \Rightarrow$ contribution nulle.

Il reste à calculer

$$\lambda^2 E_n^{(2)} = \lambda^2 \alpha^2 \left\{ \underbrace{\frac{n}{\hbar \omega}}_{p=n-1} - \underbrace{\frac{n+1}{\hbar \omega}}_{p=n+1} \right\}$$

$$= -\frac{\lambda^2 \alpha^2}{\hbar \omega} = -\frac{q^2 E^2 \hbar}{\hbar \omega 2m\omega} = -\frac{q^2 E^2}{2m\omega^2}$$

$$E_n = E_n^{(0)} - \frac{q^2 E^2}{2m\omega^2} \quad \left| \begin{array}{l} \text{voir calcul exact} \\ \text{COHEN TANNOD II} \\ \text{T1 p: 553.} \end{array} \right.$$

Exercice II - A: p: 85

A: oscill Perturbation d'un niveau dégénéré.

$$1) H_x |n_x\rangle = (n_x + 1/2) \hbar \omega |n_x\rangle \quad n_x = 0, 1, 2, \dots$$

$$H_y |n_y\rangle = (n_y + 1/2) \hbar \omega |n_y\rangle$$

$$\begin{aligned} H_0 |n_x, n_y\rangle &= (\tilde{H}_x + \tilde{H}_y) |n_x\rangle \otimes |n_y\rangle \\ &= (n_x + 1/2 + n_y + 1/2) \hbar \omega |n_x, n_y\rangle \\ &= (n_x + n_y + 1) \hbar \omega |n_x, n_y\rangle = E_{n_x, n_y} |n_x, n_y\rangle \end{aligned}$$

$$H = H_0 + H'$$

$$H' = \lambda XY$$

$$E_{n_x, n_y} = 2\hbar\omega \Rightarrow n_x + n_y = 1 \quad \begin{cases} n_x = 1 & ; & n_y = 0 \Rightarrow |1, 0\rangle \\ n_x = 0 & ; & n_y = 1 \Rightarrow |0, 1\rangle \end{cases}$$

$\Downarrow$
2 fois dégénéré

Il faut diagonaliser (H') qui représente l'Hamiltonien de perturbation H' dans le sous espace engendré par les kets $\{|1, 0\rangle, |0, 1\rangle\}$

$$H' = \lambda \begin{pmatrix} \langle 1, 0 | XY | 1, 0 \rangle & \langle 1, 0 | XY | 0, 1 \rangle \\ \langle 0, 1 | XY | 1, 0 \rangle & \langle 0, 1 | XY | 0, 1 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle 1, 0 | XY | 1, 0 \rangle = \langle 1 | X | 1 \rangle \langle 0 | Y | 0 \rangle = 0 \quad 0 = 0$$

$$\Rightarrow \langle 0, 1 | XY | 0, 1 \rangle = \langle 0 | X | 0 \rangle \langle 1 | Y | 1 \rangle = 0 \quad \text{par symétrie.}$$

$$\langle 10 | x | 01 \rangle = \langle 11 | x | 0 \rangle \langle 01 | y | 1 \rangle = a^2 \cdot 1 \cdot 1 = a^2 \quad (\langle d | 0 \rangle = \langle \psi_{n=0} | \psi_{n=0} \rangle = 1)$$

de même $\langle 01 | x y | 10 \rangle = \lambda a^2$

$$(H') = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a^2 \\ \lambda a^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(H' - \sigma \mathbb{I}_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\sigma & \lambda a^2 \\ \lambda a^2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = (\lambda a^2)^2 \Rightarrow \boxed{\sigma_{\pm} = \pm \lambda a^2}$$

à E_+ correspond $|\psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1,0\rangle + |0,1\rangle \}$ $\begin{matrix} E_+ = 2\hbar\omega + \lambda a^2 \\ \uparrow \\ 2\lambda a^2 \\ \downarrow \\ E_- = 2\hbar\omega - \lambda a^2 \end{matrix}$ niveau simple
 niveau total
 E_- correspond $|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |1,0\rangle - |0,1\rangle \}$ $E = 2\hbar\omega$ $H' = 0$ niveau simple.

$$|\psi_+\rangle = a|1,0\rangle + b|0,1\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} |1,0\rangle \\ |0,1\rangle \end{Bmatrix}$$

$$H'|\psi_+\rangle = \lambda a^2 |\psi_+\rangle \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \lambda a^2 \\ \lambda a^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda a^2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda a^2 b = \lambda a^2 a \\ \lambda a^2 a = \lambda a^2 b \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = b}$$

$$\langle \psi_+ | \psi_+ \rangle = 1 \Rightarrow |a|^2 + |b|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{\sqrt{2}} = b}$$

$$\psi_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} |1,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |0,1\rangle$$

Exercice V - B p: 88

$$\psi_a(z) = \begin{cases} A z e^{-az} & z > 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

$a > 0$

a paramètre variationnel.

1) $\psi_a(z) \rightarrow 0$ pour $z = 0$ et $z \rightarrow \infty$

Donc $\psi_a(z)$ remplit les conditions requises.

$$E[\psi_a] = \langle H \rangle_a = \frac{\langle \psi_a | H | \psi_a \rangle}{\langle \psi_a | \psi_a \rangle}$$

$$\langle \psi_a | \psi_a \rangle = \frac{|A|^2}{4a^3} \quad ; \quad \langle \psi_a | H | \psi_a \rangle = |A|^2 \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{1}{4a} + \frac{3mg}{2a^4} \right\}$$

$$E[\psi_a] = \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} a^2 + \frac{3}{2} \frac{mg}{a} \right\}$$

$$\frac{dE}{da} = 0 \Rightarrow \frac{2\hbar^2 a^2 - 3m^2 g}{2ma^2} = 0$$

$$\Rightarrow a = \left(\frac{3m^2 g}{2\hbar^2} \right)^{1/3}$$

$$E_f = \frac{3\hbar^2}{2m} \left(\frac{3m^2 g}{2\hbar^2} \right)^{2/3}$$

V. A

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2m} e^{-\beta x^2} dx = \frac{(2m)!}{2^{2m} \beta^m} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \quad m \geq 0$$

$$\psi_a(x) = C e^{-ax^2}$$

$$E[\psi_a] = \frac{\langle \psi_a | H | \psi_a \rangle}{\langle \psi_a | \psi_a \rangle}$$

$$\langle \psi_a | \psi_a \rangle = C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-2ax^2} = C^2 \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

$$\langle \psi_a | H | \psi_a \rangle = C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-ax^2} \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right\} C^{-2} e^{-ax^2}$$

$$= C^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-\frac{\hbar^2}{2m} (-2a + 4a^2 x^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right] e^{-2ax^2} dx$$

$$\Rightarrow \frac{dE(\psi_a)}{da} = 0$$

$$E(\psi_a) = \frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[-\frac{\hbar^2}{2m} (-2a + 4a^2 x^2) + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right] e^{-2ax^2}$$

$$\Rightarrow E_f = \frac{\hbar \omega}{2} = E_0$$

formellement analogue similaire $\rightarrow$ à la vraie fonction propre
de l'état fondamental de l'osc. H.S. à 1D

www.rapide way.com

Hicham
boukhaproub