

Mathématiques II

Épreuve 2011

www.9alami.info

Question 1 : On définit les fonctions ch et sh sur \mathbf{IR} , par : $cht = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ et $sht = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$.

On pose pour $t \in \mathbf{R}$, $M = \begin{bmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{bmatrix}$, alors spectre de M , est :

- A) $\{e^t, -e^t\}$ B) $\{e^{-t}, -e^t\}$ C) $\{-e^{-t}, -e^t\}$ D) $\{e^t, -e^{-t}\}$ E) Autre

Question 2 : On note $I_n = \int_0^1 (\ln(1+x))^n dx$, la somme de la série de terme général $\frac{I_n}{n!}$ est :

- A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$ D) $-\frac{1}{3}$ E) Autre

Question 3 : Soit E un espace euclidien de dimension 4 et $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E . On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit f l'endomorphisme E associé à la matrice A relativement à la base B :

- A) f est un endomorphisme non symétrique non nul et non inversible
B) f est un endomorphisme symétrique non nul et inversible
C) f est un endomorphisme non symétrique non nul et inversible
D) f est un endomorphisme symétrique non nul et inversible
E) Autre

www.9alami.info

Question 4 : On note $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, par :

$$F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 e^{-t^2} dt$$

- A) $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} (x^3 + 4xy + y^3) + x^3 y^2$
 B) $F(x, y) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} (x^2 + 4xy + y^3) + x^3 y^3$
 C) $F(x, y) = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2} (x^3 + 4xy + y^2) + x^2 y^2$
 D) $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} (x^2 + 4xy + y^2) + x^3 y^3$
 E) $F(x, y) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} (x^2 + 4xy + y^2) - x^2 y^2$

Question 5 : Soit U et V deux variables aléatoires suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_2 et p_1 . Alors la covariance ($\text{cov}(U, V)$) de U et V vérifie :

- A) $|\text{cov}(U, V)| \leq \frac{1}{2}$ B) $|\text{cov}(U, V)| \leq 1$ C) $|\text{cov}(U, V)| \leq \frac{1}{4}$ D) $|\text{cov}(U, V)| \leq \frac{1}{3}$ E) Autre

Question 6 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k+1}{n^2 + k^2 + 2k+1}$. La suite (S_n) converge vers :

- A) $\ln 2$ B) $\frac{1}{2} \ln 2$ C) $-\ln 2$ D) $-\frac{1}{2} \ln 2$ E) Autre

Question 7 : Une variable aléatoire admet pour densité la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{a}{1 + 4x^2}$$

Pour que f soit effectivement une densité de probabilité, la constante a est :

- A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{2}{\pi}$ C) $\frac{\pi}{3}$ D) $\frac{3}{\pi}$ E) Autre

Question 8 : On dispose de n urnes U_1, U_2, \dots, U_n . Pour tout k de $\{1, 2, \dots, n\}$, l'urne k contient k boules numérotés de 1 à k . On choisit une urne au hasard et on tire une boule au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et Y la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule tirée. Alors la variance de Y est :

- A) $\frac{(n-1)(7n+13)}{144}$ B) $\frac{(n+1)(7n+13)}{144}$ C) $\frac{(n-1)(7n-13)}{144}$ D) $\frac{(2n-1)(7n+13)}{144}$
 D) Autre

Question 9: Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Et M telle que $P^{-1}MP=D$,

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: M^n est la matrice

- A) $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 - 6\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 - 16\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 - 6\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 2 - 9\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 - 24\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 - 9\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}$
- B) $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 - 6\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 - 16\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 - 6\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 2 + 9\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 + 24\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 - 9\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}$
- C) $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 - 6\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 - 16\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 - 6\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 2 - 9\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 - 24\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 + 9\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}$
- D) $\frac{1}{11} \begin{pmatrix} 6 - 6\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 - 16\left(\frac{1}{12}\right)^n & 6 - 6\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 3 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 + 8\left(\frac{1}{12}\right)^n & 3 - 3\left(\frac{1}{12}\right)^n \\ 2 + 9\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 - 24\left(\frac{1}{12}\right)^n & 2 + 9\left(\frac{1}{12}\right)^n \end{pmatrix}$

Question 10: Soit θ un paramètre inconnu strictement positif. On considère une suite de variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ indépendantes identiquement distribuées de loi de fonction de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\theta} \left(1 - \frac{x}{\theta}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq \theta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Et pour tout n, on pose $S_n = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Alors, le risque quadratique de S_n est :

- A) $\frac{2\theta^2}{n}$, B) $\frac{\theta^2}{2n}$, C) $\frac{\theta^2}{n}$, D) $\frac{\theta^2}{3n}$, E) Autre

Question 11: Soient X_1, X_2, X_3 trois variables aléatoires réelles, discrètes et centrées.

$$M = E(X_i, X_j) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ Et } Y \text{ une variable aléatoire centrée. On définit la fonction :}$$

$$F(x_1, x_2, x_3) = E \left[\left(Y - \sum_{i=1}^3 x_i X_i \right)^2 \right]$$

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il admette un minimum (a,b,c) est :

- A) $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ E(YX_2) \\ E(YX_3) \end{pmatrix}$ B) $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ -E(YX_2) \\ E(YX_3) \end{pmatrix}$ C) $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(YX_1) \\ E(YX_2) \\ -E(YX_3) \end{pmatrix}$
- D) $M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -E(YX_1) \\ E(YX_2) \\ -E(YX_3) \end{pmatrix}$ E) Autre

Question 12 : Soit a un réel strictement positif et f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a(x^2)} \exp\left\{a\left(\frac{x-1}{x}\right)\right\} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et X une variable de fonction de densité f . On pose $Y = \frac{1}{X} - \left[\frac{1}{X}\right]$

$y = \frac{1}{X} - \left[\frac{1}{X}\right]$ ou $[\]$ désigne la partie entière :

Une fonction densité de Y est :

A) $\begin{cases} \frac{1}{1-e^{-a}} e^{-ay} & \text{si } y \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ B) $\begin{cases} \frac{a}{1+e^{-a}} e^{-ay} & \text{si } y \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ C) $\begin{cases} \frac{a}{1-e^{-a}} e^{ay} & \text{si } y \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

D) $\begin{cases} \frac{a}{1-e^a} e^{-ay} & \text{si } y \in [0,1[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ E) Autre

Question 13 : Soit $n > 0$ quelconque et $0 < p < 1$, $(X_i)_{i \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant la même loi uniforme sur $\{0, \dots, n\}$ et N_n une variable aléatoire indépendante des X_i suivant la loi binomiale $B(n, p)$.

On pose $U_n = \max(X_0, \dots, X_n)$, $V_n = \min(X_0, \dots, X_n)$ et $W_n = \min(X_0, \dots, X_n)$ la fonction H_n de répartition de W_n est :

A) $H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 - p \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$

B) $H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \left(1 - p \frac{x}{n}\right) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$

C) $H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + p \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$

D) $H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{x}{n}\right) \left(1 + p \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq n \end{cases}$

E) Autre

Question 14 : Soit E l'espace vectoriel $R[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients réels et le sous espace vectoriel de E des polynomes de degré inférieur ou égal à 3 .Soit f l'application nul, à tout P de E associe le polynome $Q=f(p)$ définie par $Q(X) =P(X) -P(X-1)$.On appelle g la restriction de f à F :

- A) La dimension de F est 3
- B) f est une application linéaire de E dans F ?
- C) $\ker(g)=R$
- D) la famille $(1,X)$ est une base de $\text{Im}(g)$?
- E) Autre

Question 15 : On considère la fonction numérique f définie sur $] -1, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e} (1+x)^{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \text{Alors :}$$

- A) f est continue, dérivable en 0 et $f'(0) = -1$.
- B) f est continue, est non dérivable en 0 .
- C) f est continue, dérivable en 0 et $f'(0)= 1$
- D) f est continue en 0
- E) f est continue, dérivable en 0 et $f'(0) = e$

Question 16 : On considère la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in R_4(R)$

Et u l'endomorphisme associé relativement à la base canonique B de R^4 . Pour $\lambda \in R$, on pose

$$E_\lambda = \{ \vec{x} \in IR^4 \text{ Tel que } u(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \}$$

- A) $\lambda \notin \left\{ -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 1 \right\}$, alors E_λ est réduit au vecteur nul.
- B), $\lambda \notin \left\{ 0, \frac{1}{3}, 1 \right\}$ alors E_λ est réduit au vecteur nul.
- C) $\lambda \notin \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right\}$, alors E_λ est réduit au vecteur nul.
- D) $\lambda \notin \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0 \right\}$ alors E_λ est réduit au vecteur nul.
- E) Autre

Question 17 : $M_5(R)$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 5 .On note E l'ensemble des A de la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$

Ou a et b sont deux réels quelconques. On note I l'élément de E obtenu pour $a=1$ et $b=0$ et J celui obtenu pour $a=0$ et $b=1$.Alors, on a pour p entier naturel , on a :

A) $A^n = a^n I + \left(\frac{(a-2b)^n - a^n}{2}\right) J$ B) $A^n = a^n I + \left(\frac{(a+2b)^n + a^n}{2}\right) J$ C) $A^n = a^n I - \left(\frac{(a+2b)^n - a^n}{2}\right) J$
 D) $A^n = a^n I + \left(\frac{(a+2b)^n - a^n}{2}\right) J$ E) Autre

Question 18: Pour tout réel α non nul, on définit la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \alpha^2 \\ \frac{1}{\alpha} & 0 & \alpha \\ \frac{1}{\alpha^2} & \frac{1}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$

Alors les valeurs propres de A sont :

A) $\{-\alpha, 2\alpha\}$ B) $\{-\alpha, -2\alpha\}$ C) $\{\alpha, -2\alpha\}$ D) $\{-1, 2\}$ E) Autre

Exercice 19 : Soit X_1, \dots, X_n n variables aléatoirement indépendantes et suivant la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout i compris entre 1 et n, on pose

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et } Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$$

Un estimateur sans biais de $\exp(-\theta)$ est :

A) $\frac{Z_n}{n} + 1$ B) $\frac{Z_n}{n} - 1$ C) $\frac{Z_n}{n}$ D) $\frac{Z_n}{n-1}$ E) Autre

Exercice 20 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right] = \ln(n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$v_n = u_{n+1} - u_n$. Alors u_n est équivalent, quand n tend vers $+\infty$, à :

A) $\frac{1}{n^2}$ B) $\frac{1}{n^2}$ C) $\frac{1}{2n^2}$ D) $\frac{-2}{n^2}$ E) $\frac{-1}{2n^2}$

www.9alami.info