Groupe ISCAE

CONCOURS D'ACCES A LA GRANDE ECOLE

ANNEE 2013

MATHEMATIQUES II

DUREE : 3 heures

N.B :

1. Il n'est fait usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
2. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
3. Les téléphones portables sont strictement interdits et doivent être éteints.
4. Les réponses aux questions devront être portées sur la grille distribuée en complément du sujet.
5. Il ne sera admis qu'une seule réponse par question.
6. Le barème suivant sera adopté:

Réponse correcte: +2

Réponse fausse: - 1

Pas de réponse: 0

Il y a 20 questions totalement indépendantes.

Question 1 :

Soit $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 muni de sa structure d'espace vectoriel et soit J la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère l'application S de $M_2(\mathbb{R})$ dans lui-même qui associe à tout élément M de $M_2(\mathbb{R})$ l'élément S (M) = J M J

L'application S est un automorphisme de l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$.

De plus , si M et N sont deux éléments quelconques de $M_2(\mathbb{R})$, on a :

S (M N) = S (M) S (N)

On considère les éléments :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice représentant l'automorphisme S dans la base (I , J , K , L) est alors égale à :

$A)\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $C)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$D)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $E)$ *Autre réponse*

Question 2 :

Soit f la fonction définie pour tout réel x par :

$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{x})$

Après avoir déterminé l'expression de $f'(x) + f(x)$, pout tout réel x , (où $f'(x)$ est la dérivée de de f en x) , on en déduit que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge vers :

$A)\ \dfrac{\ln 3}{2}$ $B)\ 2\ln 2$ $C)\ \dfrac{\ln 2}{3}$ $D)\ 3\ln 5$ $E)$ *Autre réponse*

Question 3 :

On considère l'ensemble $\mathcal{F}$ des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ où x , y et z sont des réels .

On note φ l'application linéaire de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice A de $\mathcal{F}$ associe le nombre :

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j} a_{ij} \quad ,$$

où a_{ij} désigne l'élément de la matrice A situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

On note Ker φ le noyau de φ . La dimension de Ker φ est alors égale à:

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) Autre réponse

Question 4 :

Soit $f_k(x) = \dfrac{(\ln(x))^k}{x-1}$ $\quad si\ x \neq 1 \quad et \quad f_k(1) = 0 \quad , où\ k \in N$.

Pour quelles valeurs de k , f_k est continue en 1 ?

A) $k \in [\,2\,, +\infty\,[$ B) $k \in [\,1\,, +\infty\,[$ C) $k \in \,]\,1\,, 2\,]$ D) $k \in \,]\,1\,, +\infty\,[$
E) Autre réponse

Question 5 :

On rappelle que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ $\quad et \quad$ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On considère un nombre entier $n \geq 2$ et une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n .
On extrait de cette urne successivement et sans remise 2 jetons et on désigne alors par :
N_1 la variable aléatoire indiquant le numéro du premier jeton tiré ,
N_2 la variable aléatoire indiquant le numéro du second jeton tiré .
On pose : $Z = N_1 + N_2$
La variance de la variable aléatoire Z est alors égale à :

A) $\dfrac{(n-1)(n+3)}{6}$ B) $\dfrac{(n+2)(n-3)}{6}$ C) $\dfrac{(n+1)(n-2)}{6}$ D) $\dfrac{(n+5)(n-4)}{6}$

E) *Autre réponse*

Question 6 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2+k+1}{k!}$

La suite (S_n) converge vers :

A) 0 ; B) $4e$; C) $\ln 2$; D) $\frac{1}{2}$; E) Autre réponse

Question 7 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

On pose : $Y = \ln(e^X - 1)$

Calculer $E(X)$.

A) $\ln 2$; B) 0 ; C) $\frac{e \ln 2}{2}$; D) $e-1$; E/ Autre réponse

Question 8 : Pour tout réel m non nul, on définit la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 0 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

L'ensemble des valeurs propres de A est :

A/ $\{-m, m\}$; B/ $\{m, 2m\}$; C / $\{m, 2\}$; D/ $\{-1, 2\}$; E/ Autre réponse

Question 9 : Soit $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi uniforme sur $[0, a]$, où a est un nombre réel non nul.

On pose : $T_n = Max(X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_n)$ et $T_n' = \frac{n+1}{n} T_n$

La variance de T_n' est :

A) $\frac{a}{n+1}$; B) $\frac{a}{2n}$; C) $\frac{a^2}{n(n+2)}$; D) $\frac{n}{a}$; E) autre réponse

Question 10 : Soient les matrices :

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M \text{ telle que } M = PDP^{-1}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: M^n est la matrice :

A) $M^n = (2^n - 1)M + (2 - 2^n)I_3$; B) $M^n = (2^n + 1)M + (1 - 2^n)I_3$;

C) $M^n = 2^n M + (1 - 2^n)I_3$; D) $M^n = 2^n M + (1 + 2^n)I_3$; E) Autre réponse

Question 11 : Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^1 [\text{Log}(1+x)]^n dx$

Log désigne le logarithme népérien. On cherche un équivalent de I_n quand n tend vers l'infini;

On pourra commencer par étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis par voir la relation de récurrence liant I_{n+1} à I_n, et enfin par trouver un encadrement de I_n

Alors, un équivalent de I_n quand n tend vers l'infini est:

A) $\frac{1}{n}(Log2)^{n+1}$; B) $\frac{2}{n}(Log2)^{n+1}$; C) $\frac{2^{n+1}}{n}$; D) $\frac{2^n}{n}$; E: Autre Réponse

Question 12 : Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^n)} dx$

Log désigne le logarithme népérien. On cherche un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini;

On pourra commencer par remarquer que $(\forall x \geq 0)$ $\frac{1}{1+x} \leq 1$; puis par étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $I_n = \int_0^1 \text{Log}(1+x^n)dx$; puis par voir la relation de récurrence liant u_n à I_n.

Alors, un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini est:

A) $\frac{1}{n}(Log2)^{n+1}$; B) $\frac{2}{n}(Log2)^{n+1}$; C) $\frac{2^{n+1}}{n}$; D) $\frac{\text{Log}2}{n}$; E: Autre Réponse

Question 13 : La somme $S=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(2n)!}$ est égale à:

A) e^3 ; B) $e^{\sqrt{3}}$; C) $\frac{1}{2}(e^{\sqrt{3}}+e^{-\sqrt{3}})$; D) $\frac{1}{2}(e^{\sqrt{3}}-e^{-\sqrt{3}})$; E) Autre réponse

e désigne la base du logarithme népérien

Question 14 : La somme $S=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ est égale à:

A) 1 ; B) 2 ; C) $\frac{\pi^2}{12}$; D) $\frac{\pi^2}{6}$; E) Autre réponse

Question 15 : La somme $S=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ est égale à:

A) e ; B) $\frac{1}{e}$; C) $\frac{1}{2}(e+\frac{1}{e})$; D) $\frac{1}{2}(e-\frac{1}{e})$; E) Autre réponse

e désigne la base du logarithme népérien

Question 16: Calculer $I = \iint_D f(x,y)dxdy$

Dans le cas où D est le triangle de sommets O(0,0), A(1,0), B(0,1) et $f(x, y) = \ln(x+y+1)$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{4}$ E) Autre réponse

Question 17: On se donne les matrices

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 16 & -1 \\ 232 & -15 \end{pmatrix}$

Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Les matrices inversibles P telles que $P^{-1} A P = B$ sont de la forme :

A) $\begin{pmatrix} 15b-d & b \\ -8b & d \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 8b+2d & b \\ 15b & d \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} -15b-d & b \\ -8b-16d & d \end{pmatrix}$; D) $\begin{pmatrix} 15b+d & 2b \\ -8b+d & 2d \end{pmatrix}$;

E) Autre réponse

Question 18 Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

Alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$

A) 0 ; B) 1 ; C) -1 ; D) ½ ; E) Autre réponse

Question 19 a, b, c et d étant des nombres réels, les matrices carrées $A = (a_{ij})$ d'ordre 4 qui

commutent avec la matrice $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

sont de la forme :

A) $aI + bJ^2$; B) $aJ + bJ^2 + cJ^3$; C) $aI + bJ + cJ^2 + dJ^3$; D) $aI + bJ^3$; E) Autre réponse

Question 20 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$f(x,y) = 2x^2+2y^2+2xy-x-y$

f présente

A) un minimum local en A(1/6,1/6) ; B) un minimum global en A(1/6,1/6) ;
C) un maximum local en B(-1/6,1/6) ; D) un maximum global en B(-1/6,1/6) ; E) Autre réponse