المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتعليم العالي
وتكوين الأطر
والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مباراة توظيف أساتذة التعليم الثانوي
التأهيلي من الدرجة الثانية
نونبر 2011
الموضوع

الاختبار:	موضوع حول مادة التدريس المطلوبة	المعامل:	3
التخصص :	الرياضيات	مدة الإنجاز:	ثلاث ساعات

EXERCICE 1 :(4 points)

Soit ABC un triangle ayant tous ces angles aigus, soient L et N les intersections de la bissectrice intérieur de l'angle $\widehat{A}$ avec, respectivement (BC) et le cercle circonscrit à ABC. Soient K et M les projections orthogonales de L sur les cotés $[AB]$ et $[AC]$.

1 a) Montrer que : $Aire(AMNK) = \frac{1}{2} AN.MK$

1 b) Montrer que les points A, K, L et M sont cocycliques, puis, en utilisant la loi des sinus, prouver que : $KM = AL.\sin\widehat{A}$

1 c) Montrer que les triangles ACL et ANB sont semblables en déduire que $AB.AC = AN.AL$

1 d) calculer en fonction de AB, AC et $\sin\widehat{A}$ l'aire du triangle ABC, en déduire que : $Aire(AMNK) = Aire(ABC)$

EXERCICE 2 :(5 points)

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes le polynôme suivant :
$P(z) = z^3 - z^2 - (5+4i)z + 21 - 12i$

1 1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ sachant qu'elle admet une solution réelle.

2 - Le plan complexe est munit d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Soient A, B et I les points d'affixes respectifs $z_A = 3+2i$, $z_B = -3$, $z_I = 1-2i$.

1 a) Calculer $Z = \frac{z_I - z_A}{z_I - z_B}$, en déduire la nature du triangle IAB,

0.5 b) Déterminer z_C l'affixe du point C image du point I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

0.5 c) déterminer z_D l'affixe du point D le barycentre du système pondéré $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$,

0.5 d) Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.

0.75 3- Déterminer (Γ) l'ensemble des points M tel que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right\|$$

0.75 4- Déterminer (C) l'ensemble des points M tel que : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=4\sqrt{5}$

EXERCICE 3 :(3 points)

On considère dans $\mathbb{Z}$, l'équation (E) : $x^{2011}\equiv 2\ [19]$

1 1- Trouver deux entiers naturels u et v tels que : $2011u-18v=1$

2 2- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

EXERCICE 4 (8 points)

Partie I : On pose pour tout entier naturel n non nul, $u_n=\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{p}$

0.5 1- a) Montrer que : $(\forall p\in\mathbb{N}^*)\quad \int_p^{p+1}\frac{dt}{t}\geq\frac{1}{p+1}$

0.5 b) En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad u_n\leq 1+\ln(n)$

2- On considère la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\begin{cases}\varphi_1(0)=0\\ \varphi_1(x)=x(1+\ln(x)) & si\ x>0\end{cases}$

0.5 a) Montrer que φ_1 est continue sur $\mathbb{R}_+$.

1.5 b) Etudier les variations de φ_1 et tracer l'allure de la courbe représentative de φ_1.(On précisera la branche infinie et la demi-tangente au point d'abscisse 0)

Partie II : Pour tout réel x positif et pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$\varphi_{n+1}(x)=\int_0^x\varphi_n(t)\,dt \qquad \text{(On rappelle que } \varphi_1 \text{ a été définie à la partie I)}$$

1.5 1- a) Montrer que , pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$,la fonction φ_n est parfaitement définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ .Que vaut $\varphi_n(0)$?

1.5 b) Vérifier qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)\quad \varphi_n(x)=x^n(a_n+b_n\ln x)$$

(On montrera que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ a_{n+1}=\frac{a_n}{n+1}-\frac{b_n}{(n+1)^2}$ et $b_{n+1}=\frac{b_n}{n+1}$)

0.5 c) Calculer b_n

2- Pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$,on pose : $c_n=n!a_n$

0.5 a) Montrer que : $c_n=2-u_n$

0.5 b) En déduire que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $|c_n|\leq 1+\ln(n)$

0.5 c) Conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$