EXERCICE 1 :(sur 8 points)

1) Pour tout réel m , on considère l'application f_m de R vers R , définie par :
$f_m(0)=0$ et $f_m(t)=|t|^m.\sin t.\sin(1/t)$ si $t\neq 0$

a) Etudier suivant m, la continuité de f_m .

b) Discuter suivant m , la différentiabilité de f_m au point 0.

2) Soient $g(x)=\int_x^1 \sin(t).\sin(\frac{1}{t})\frac{dt}{t^2}$ et $h(x)=\int_x^1 \cos(t).\cos(\frac{1}{t})dt$ pour $x>0$.

a) Démontrer que h admet une limite finie à droite au point 0 .

b) Simplifier l'expression : g(x)+h(x) pour x > 0.

c) En déduire que $\int_0^1 \sin(t).\sin(\frac{1}{t})\frac{dt}{t^2}$ est convergente .

3) Soient $G(x)=\int_x^1 \sin(t).\sin(\frac{1}{t})dt$ et $H(x)=\int_1^x \sin(t).\sin(\frac{1}{t})dt$ pour x > 0.

a) Comparer G(x) et g(1/x) pour x>0 .

b) En déduire que H admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

c) Conclure la nature de $\int_0^{+\infty} \sin(t).\sin(\frac{1}{t})dt$

EXERCICE 2 : (sur 4 points)

1) Montrer que la suite $S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\dots+\frac{1}{2n}$ est décroissante et qu'elle a une limite finie qui sera notée S .

2) Soit f :[0 , 1] → R une fonction continue telle que $f'_d(0)=\lambda$ à droite de 0 existe dans R et que f(0)=0.

Montrer que la suite de terme générale : $\sigma_n=f(\frac{1}{n})+f(\frac{1}{n+1})+\dots+f(\frac{1}{2n})$ converge vers λS

3) En prenant f(x)=Log(1+x) , déduire la valeur de S

EXERCICE 3 : (sur 5 points)

Soit $E=R_n[X]$ l'espace vectoriel réel des polynomes de degré inférieur ou égal à n .
On considère l'application f définie par :
$\forall P\in E$, f(P) = Q où $Q(X)=n(1-2X)P(X)-2X(1-X)P'(X)$.
(P' étant le polynome dérivé de P)

1) Montrer que f est un endomorphisme de E.
2) Déterminer le noyau et le rang de f.
3) Déterminer la matrice de f par rapport à la base canonique de E.

EXERCICE 4 : (sur 3 points)

Soient ABC un triangle isocèle de sommet A et M un point de [BC].
H et P les projections orthogonales respective de M sur (AC) et (AB).
C' la projection orthogonale de C sur (AB).

Montrer que CC' = MH + MP.

Barème :

Ex 1 : 1 point pour chaque question

Ex 2 :

1) 1 pt
2) 2 pts
3) 1 pt

Ex 3 :

1) 1 pt
2) 2 pts
3) 2 pts

Ex 4 : 3 pts