

مباراة الالتحاق بالسلك الترتيبي
دورة 17 شتنبر 1999

217

المدة : 3 ساعات

الشعبة : الرياضيات

المعامل : 1

المسادة : موضوع في الرياضيات

113

Exercice 1 :

1. Montrer que la suite $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$ est décroissante, et qu'elle admet une limite finie, qui sera notée S .

2. Soit $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que la dérivée à droite $f'_d(0) = \lambda$ existe dans $\mathbb{R}$, et que $f(0) = 0$. Montrer que la suite :

$$\sigma_n(f) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n+1}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

tend vers $\lambda \cdot S$.

3. Calculer $\sigma_n(f)$ lorsque $f(x) = \text{Log}(1+x)$ et en déduire que $S = \text{Log } 2$.

4. Application : déterminer la limite de la suite

$$\sigma_n = \text{Lim}\left(\frac{1}{n}\right) + \text{Lim}\left(\frac{1}{n+1}\right) + \dots + \text{Lim}\left(\frac{1}{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Lim}\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

Exercice 2 :

1. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta$.

P. 226

(a) Etablir que $(\forall n \in \mathbb{N})$: $a_{n+d} = \frac{n+1}{n+d} \cdot a_n$ et en déduire la valeur de a_p et de a_{p+1} pour tout $p \in \mathbb{N}$.

(b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ puis en déduire que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{(p!) \sqrt{p}}{4^p (p!)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \quad (\text{formule de Wallis})$$

2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) : \sum_{k=1}^n a_k = \text{Log} \left(\frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \right)$$

(a) Déterminer a_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{2}} a_n$ et en déduire qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} = l$.

(b) En utilisant la formule de Wallis, montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} = \sqrt{2\pi} \quad (\text{formule de Stirling})$$

3. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{n} \\ f_n(x) = 0 & \text{si } x > \sqrt{n}. \end{cases}$$

(a) Donner une majoration des fonctions f_n montrant que les intégrales $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x) dx$ sont normalement

convergentes.

(b) Montrer, par un changement de variable, que l'on a :

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} \frac{t}{t} dt$$
, et en déduire la valeur de I_n puis celle de $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ par passage à la limite, en utilisant la formule de Stirling.

Exercice 3 :

On désigne par (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ sur $\mathbb{R}$ et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^4$ défini par : $u(e_1) = e_1 + e_3 + e_4$, $u(e_2) = -e_1 - e_3 - e_4$, $u(e_3) = 2e_1 + e_2 + e_3 + e_4$ et $u(e_4) = -2e_1 - e_2$.

1. Calculer le polynôme caractéristique $P_u(X)$ de u et en déduire les valeurs propres de u .

2. Montrer qu'il existe deux sous-espaces vectoriels supplémentaires E_1 et E_2 de $\mathbb{R}^4$ stables par u et tels que la restriction de $u - \lambda_i I$ à E_i soit nilpotente pour $i=1$ et $i=2$ (I désigne l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^4$, $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$).

3. Soit u_i la restriction de u à E_i ($i=1, 2$). Déterminer une base de E_i telle que la matrice de u_i par rapport à cette base se mette sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ pour } i=1 ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ pour } i=2$$

Barème :

Exercice 1 : sur 4 points (1+1, 1+0, 1+1)
Exercice 2 : sur 10 points (3+3+4)
Exercice 3 : sur 6 points (2+2+2)