www.9alami.info

مباراة الدخول إلى المراكز التربوية الجهوية
دورة 29 شتنبر 2003

1/2

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والشباب
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
جهة الدار البيضاء الكبرى
مادة : الرياضيات

شعبة : الرياضيات
المدة : 3 ساعات
المعامل : 1

EXERCICE1 : (3pts)

Soit $E=\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients reels de degrés inférieur ou égal à n , et soit U et V deux applications définies sur E par :

$U(P) = -nXP(X) + X^2P'(X)$

$V(P) = -nP(X) + 2XP'(X)$ $P'(X)$ est le polynôme dérivé de $P(X)$

1. Montrer que U et V sont des endomorphismes de E et déterminer Ker(U)
2. Calculer VoU-UoV .
3. Soit P un vecteur propre de V, montrer que U(P) est aussi vecteur propre de V

EXERCICE2 : (5 ,5 pts)

On considère un espace vectoriel E de dimension finie n sur le corps C des nombres complexes et deux endomorphismes f et g de E , on désigne par I l'application identique de E

1. Montrer que si gof a une valeur propre nulle alors fog a aussi une valeur propre nulle
2. trouver une condition nécessaire et suffisante concernant les valeurs propres de f pour que I-f soit inversible .
3. A quelles conditions existe-t-il un nombre complexe α tel que $I-\alpha f$ ne soit pas inversible
4. On suppose que I –fog soit inversible ; Montrer que $[I-gof]o[I+go(I-fog)^{-1}of]=I$. En déduire que I-gof est inversible.
5. Déduire que quels que soient les endomorphismes f et g de E , fog et gof ont les mêmes valeurs propres .

EXERCICE3 (4,5pts)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle et soit $(b_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général : $b_n=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$

1. Montrer que : $\forall n\geq 1$, $(a_1+a_2+\ldots\ldots+a_n)^2\leq n(a_1^2+a_2^2+\ldots\ldots a_n^2)$
2. En déduire que si la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ est convergente alors $\lim_{n\to\infty} b_n=0$.
3. Calculer $\lim_{n\to\infty} S_n=0$ où $S_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n}+\ldots+\frac{1}{n^2}$.

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والشباب
الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين
لجهة الدار البيضاء الكبرى

مباراة الدخول إلى المراكز التربوية الجهوية
دورة 29 شتنبر 2003

1 / 1

شعبة : الإعلاميات

المادة : الرياضيات

المدة : 1h30
المعامل : 1

Exercice 1

1) Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\quad \frac{1}{p+1} \leqslant \ln(p+1) - \ln p \leqslant \frac{1}{p}$

1 2) En déduire $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$

1 3) En considérant la fonction $f : x \longmapsto \ln(\ln x)$

étudier $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k \ln k}$

Exercice 2

4 Calculer

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & C_1^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 \cdots & C_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{avec } n \geqslant 2$$

Exercice 3

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré $\leqslant 6$ et soit $F = \{P \in E \ / \ P(2) = P(3) = 0\}$

2 1) Montrer que F est un $\mathbb{R}$espace vectoriel de dimension finie

2 2) On pose $Q = (X-2)(X-3)$
Montrer que les polynômes Q, XQ, X^2Q, X^3Q et X^4Q sont linéairement indépendants

2 3) En déduire que $\dim_{\mathbb{R}} F = 5$

Exercice 4

4 Tracer la courbe d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والشباب
الأكاديمية الجهوية للتربية و التكوين
جهة الدار البيضاء الكبرى
مادة : الرياضيات

مباراة الدخول إلى المراكز التربوية الجهوية
دورة 29 شتنبر 2003

شعبة : الرياضيات
المدة : 3 ساعات
المعامل : 1

EXERCICE 1 : (3 pts)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degrés inférieur ou égal à n , et soit U et V deux applications définies sur E par :

$U(P) = -nXP(X) + X^2P'(X)$

$V(P) = -nP(X) + 2XP'(X)$ $P'(X)$ est le polynôme dérivé de $P(X)$.

1. Montrer que U et V sont des endomorphismes de E et determiner Ker(U) .
2. Calculer VoU-UoV
3. Soit P un vecteur propre de V, montrer que U(P) est aussi vecteur propre de V

EXERCICE 2 : (5 ,5 pts)

On considère un espace vectoriel E de dimension finie n sur le corps C des nombres complexes et deux endomorphismes f et g de E , on designe par I l'application identique de E

1. Montrer que si gof a une valeur propre nulle alors fog a aussi une valeur propre nulle
2. trouver une condition nécessaire et suffisante concernant les valeurs propres de f pour que I-f soit inversible .
3. A quelles conditions existe-t-il un nombre complexe α tel que $I-\alpha f$ ne soit pas inversible
4. On suppose que I - fog soit inversible ; Montrer que $(I-gof)o[I+go(I-fog)^{-1}of]=I$. En deduire que I-gof est inversible.
5. Déduire que quels que soient les endomorphismes f et g de E , fog et gof ont les mêmes valeurs propres

EXERCICE 3 : (4,5pts)

Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle et soit $(b_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général : $b_n = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$

1. Montrer que $\forall n \geq 1$, $(a_1+a_2+\dots\dots+a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \dots\dots a_n^2)$
2. En déduire que si la série $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^2$ est convergente alors $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$
3. Calculer $\lim_{n\to\infty} S_n = 0$ où $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n} + \dots + \frac{1}{n^2}$.