المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
قطاع التربية الوطنية

المركز الوطني للامتحانات

C: SP10

مباراة الدخول إلى المراكز التربوية الجهوية (دورة شتنبر: 2006)
الموضوع

مدة الإنجاز:	2h30
المعامل:	2

المـــادة: الرياضيات

الشعبة: الرياضيات

Analyse

Exercice I : (6.5pts)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul n par $u_{n+1} = u_n - 2u_n^3$ et $u_1 = \frac{1}{10}$

1 1.a) Déterminer la monotonie de la suite (u_n).

1 b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

2. Soit (v_n) une suite définie pour tout entier naturel non nul n, qui converge vers un réel l.

On définit alors la suite (M_n) pour tout entier naturel non nul n, par

$$M_n = \frac{1}{n}(v_1 + v_2 + \ldots + v_n)$$

M_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite (v_n).

1 a) Soit n un entier naturel non nul, et p un entier tel que $1 \le p \le n$.

Montrer que $\left|M_n - l\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=p}\left|v_k - l\right| + \max_{p<k\le n}\left|v_k - l\right|$

1 b) Conclure avec soin que si la suite (v_n) converge vers l, alors (M_n) converge aussi vers l.

3. *Application à la recherche d'un équivalent de* (u_n)

1 a) Déterminer la limite de $\frac{1}{(x-2x^3)^2} - \frac{1}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

0.5 En déduire la limite de la suite (w_n) définie par : $w_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$

1 b) Utiliser tous les résultats précédents pour donner un équivalent au voisinage de $+\infty$ de la suite (u_n).

Exercice II : (4pts)

On note (E) l'équation différentielle $|x|y' + (x-1)y = x^2$.

2 a) Résoudre (E) sur $]0; +\infty[$.

2 b) Sachant que les solutions de (E) sur $]-\infty;0[$ sont les fonctions $x \to x + 2 + \frac{2}{x} + b\frac{e^x}{x}$

où $b \in \mathbb{R}$, existe-t-il des solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$? Si oui, les expliciter.

مباراة الدخول إلى المراكز التربوية الجهوية
دورة (شتنبر 2006)
الموضوع

المـــادة :	الرياضيات
الشعبـة:	الرياضيات

Algèbre

Exercice I : (9.5 pts)

Soit E un espace vectoriel de dimension n ($n \geq 1$) et U un endomorphisme de E vérifiant :

(*) $U^2 - 3U + 2Id_E = 0$

1 1. Montrer que U est bijective et déterminer U^{-1} en fonction de U.

2. On pose $V=U-Id_E$ et $W=U-2Id_E$.

1 a) Montrer que $E=ImV+ImW$.

1 b) Déterminer VoW et WoV, puis en déduire que $ImV \subset KerW$ et $ImW \subset KerV$.

1 c) Montrer que $E= KerV \oplus KerW$.

1 d) Montrer qu'il existe une base $B=(e_1,e_2, \dots ,e_n)$ telle que :

$\forall i \ / \ 1 \leq i \leq n, \exists a_i \in \{1;2\} \ / \ U(e_i)=a_ie_i$.

0.5 3. a) Montrer qu'il existe deux suites réelles $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ telles que :

$\forall n \in \mathbb{N}, U^n=a_nU+b_nId_E$, avec $U^0=Id_E$.

0.5 b) Donner les valeurs de a_0, a_1, b_0, b_1.

0.5 c) Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$.

0.5 d) Exprimer U^n en fonction de n , U et Id_E.

4. Soit $B=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et soit U l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$U(e_1)= e_1- e_3$; $U(e_2) = e_1+2e_2+e_3$ et $U(e_3)=2e_3$.

0.5 a) Montrer que U vérifie (*).

1 b) Déterminer $Ker(U-Id_E)$ et $Ker(U-2Id_E)$.

1 c) En déduire une base $B_0=(f_1,f_2,f_3)$ de $\mathbb{R}^3$ vérifiant la propriété de la question 2.d.

Fin de l'épreuve

$\forall i, 1 \leq i < n$

$(x_1, x_2, x_3) = x_1(1,1,0) + x_3(0,0,1)$

v_1 v_2

$E = F \oplus G$

soit $x \in E$ $\exists ! x' \in F$ ... $x' + x''$

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$

$Ker(U-2Id_E) = vect\{(1,1,0),(0,0,1)\}$

$\Rightarrow dim Ker(-) = 2$

$\Rightarrow dim Ker(U-Id_{\mathbb{R}^3}) = 1$

$dim \mathbb{R}^3 = dim Ker + dim Ker(U-2Id_{\mathbb{R}^3})$