المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مباراة الدخول إلى المراكز التربوية الجهوية
(دورة : شتنبر 2007)
الموضوع

التخصص : الرياضيات

مادة الاختبار : الرياضيات

مدة الإنجاز: ساعتان ونصف

المعامل: 2

EXERCICE 1 (13 points)

1 **1.** Pour quelle(s) valeur(s) de β l'intégrale $\int_0^1 t^\beta dt$ est-elle convergente ? Justifier.

1 **2.** Soit x un réel strictement positif, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$ est convergente.

On peut donc définir sur $]0, +\infty[$, la fonction Gamma d'Euler notée Γ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$

3. Calculer $\Gamma(1)$ puis montrer la relation fondamentale suivante notée (F) :

4x0,5 $$\forall x \in]0, +\infty[\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (F).$$

En déduire $\Gamma(2)$. Soit n un entier naturel non nul, donner une expression simple de $\Gamma(n)$.

4. Dérivabilité de la fonction Gamma

Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$.

1 **a.** Pour tout réel t strictement positif, on définit sur $]0, +\infty[$, la fonction h_t par $h_t(x) = t^{x-1}$
Déterminer les variations de h_t .(On pourra discuter selon la valeur de t)

0,5 En déduire que $\forall x \in [a,b], \ \forall t \in]0, +\infty[, \quad 0 \le t^{x-1} \le (t^{a-1} + t^{b-1})$.

1 **b.** Montrer que pour tout réel r strictement supérieur à -1, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t}t^r |\ln t| dt$ est convergente.

1,5 **c.** Montrer avec soin que la fonction Γ est dérivable sur $[a,b]$ et déterminer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

1 **5. On admet** que Γ est de classe $C^{+\infty}$ sur $]0, +\infty[$. Soit p un entier naturel, écrire, **sans justifier,** $\Gamma^{(p)}(x)$ sous forme d'intégrale. ($\Gamma^{(p)}$ désigne la dérivée p-ième de Γ).

Etude de la fonction Gamma

1 **6.** Utiliser la relation (F) pour déterminer un équivalent de Γ au voisinage de 0^+. En déduire la limite de Γ en 0.

1 **7. a.** Justifier que Γ' est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

1 **b.** Justifier l'existence d'un réel $c \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. En déduire le signe de Γ' et
2x0,5 enfin , les variations de Γ .

مباراة الدخول إلى المراكز التربوية الجهوية
(دورة : شتنبر 2007)
الموضوع

التخصص : الرياضيات
مادة الاختبار : الرياضيات

EXERCICE 2 (7 points)

Soit A une matrice carrée de $M_n(\mathbb{R})$, on dit qu'une matrice R est une racine carrée de A si $R^2 = A$. On note $Rac(A)$ l'ensemble des racines carrées de A.

Dans ce problème nous allons traiter le cas où A possède n valeurs propres distinctes

On suppose que la matrice A de $M_n(\mathbb{R})$ admet n valeurs propres réelles $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots\ldots < \lambda_n$.

1 **1.** Justifier l'existence d'une matrice P de $M_n(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où

1 $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, puis montrer que R est une racine carrée de A si et seulement si la matrice $S = P^{-1}RP$ est une racine carrée de D. ($diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ désigne la matrice carrée d'ordre n dont la diagonale est formée des termes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et dont tous les éléments en dehors de la diagonale sont nuls).

2. Racines carrées de D

On suppose que D admet une racine carrée S.

0,5 **a.** Montrer que $DS = SD$.

1,5 **b.** En déduire que la matrice S est diagonale.

0,5 **c.** On note alors $S = diag(s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Que vaut s_i pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$?

0,5 **d.** Que peut-on dire de $Rac(A)$ si A admet une valeur propre strictement négative?

0,5 **e.** Si on suppose que toutes les valeurs propres de A sont positives ou nulles, déterminer les racines carrées de la matrice D. On pourra poser $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$ pour $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

1+0,5 **3.** Écrire toutes les racines carrées de A à l'aide de la matrice P. Combien de racines carrées A admet-elle ? (On discutera selon le signe des valeurs propres de A).

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
قطاع التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات
مباراة الدخول إلى المراكز التربوية الجهوية
(دورة : شتنبر 2007)
الموضوع

التخصص : الرياضيات — مدة الإنجاز: ساعتان ونصف

مادة الاختبار : الرياضيات — المعامل: 2

EXERCICE 1 (13 points)

1 **1.** Pour quelle(s) valeur(s) de β l'intégrale $\int_0^1 t^{\beta} dt$ est-elle convergente ? Justifier.

1 **2.** Soit x un réel strictement positif, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ est convergente.

On peut donc définir sur $]0\,,+\infty[$, la fonction Gamma d'Euler notée Γ par $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

3. Calculer $\Gamma(1)$ puis montrer la relation fondamentale suivante notée (F) :

4x0,5 $$\forall x \in]0\,,+\infty[\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (F).$$

En déduire $\Gamma(2)$. Soit n un entier naturel non nul, donner une expression simple de $\Gamma(n)$.

4. Dérivabilité de la fonction Gamma

Soient a et b des réels tels que $0 < a < b$.

a. Pour tout réel t strictement positif, on définit sur $]0\,,+\infty[$, la fonction h_t par $h_t(x) = t^{x-1}$

1 Déterminer les variations de h_t .(On pourra discuter selon la valeur de t)

0,5 En déduire que $\forall x \in [a,b],\ \forall t \in]0\,,+\infty[,\quad 0 \le t^{x-1} \le (t^{a-1} + t^{b-1})$.

1 **b.** Montrer que pour tout réel r strictement supérieur à -1, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{r} |\ln t|\, dt$ est convergente.

1,5 **c.** Montrer avec soin que la fonction Γ est dérivable sur $[a,b]$ et déterminer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

1 **5. On admet** que Γ est de classe $C^{+\infty}$ sur $]0\,,+\infty[$. Soit p un entier naturel, écrire, **sans justifier,** $\Gamma^{(p)}(x)$ sous forme d'intégrale. ($\Gamma^{(p)}$ désigne la dérivée p-ième de Γ).

Etude de la fonction Gamma

1 **6.** Utiliser la relation (F) pour déterminer un équivalent de Γ au voisinage de 0^{+}. En déduire la limite de Γ en 0.

1 **7. a.** Justifier que Γ' est strictement croissante sur $]0\,,+\infty[$.

1+ 2x0,5 **b.** Justifier l'existence d'un réel $c \in]1,2[$ tel que $\Gamma'(c) = 0$. En déduire le signe de Γ' et enfin, les variations de Γ.