المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مباراة الدخول إلى المراكز التربوية الجهوية
دورة شتنبر 2011
الموضوع

التخصص :	الرياضيات	المعامل:	2
مادة الاختبار :	موضوع في الرياضيات	مدة الإنجاز:	ساعتان ونصف

EXERCICE 1 (7 points)

On considère la fonction f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = x + \ln x$$

0.5pt A : 1) a- Etudier les variations de la fonction f.

0.5pt b- Montrer que la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers un ensemble que l'on déterminera.

0.5pt c- Représenter la fonction f dans un repère orthonormé du plan (unité graphique :2cm).

2) Pour tout entier naturel non nul p, on considère l'équation

$$(E_p) : \; x + \ln x = p$$

0.5pt a- Montrer que l'équation (E_p) admet une et une seule racine x_p.

0.5pt b- Etudier la monotonie de la suite $(x_p)_{p\geq 1}$

1pt c- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad \ln x < x$

et en déduire que : $(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{p}{2} \leq x_p \leq p$

0.5pt d- Déterminer la limite de la suite $(x_p)_{p\geq 1}$

1pt B :1) Montrer que $\frac{\ln(x_p)}{p}$ tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

En déduire que : $x_p \sim p$ au voisinage de $+\infty$

0.5pt 2) Calculer la limite de $x_{p+1} - x_p$ quand p tend vers $+\infty$.

3) On pose : $(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad u_p = \frac{p - x_p}{\ln p}$

0.5pt a- Montrer que : $(\forall p \in \mathbb{N}^*) \quad u_p - 1 = \frac{\ln\left(\frac{x_p}{p}\right)}{\ln p}$

0.5pt b- Déterminer la limite de la suite $(u_p)_{p\geq 1}$

0.5pt c- En déduire que : $1 - u_p \sim \frac{1}{p}$ au voisinage de $+\infty$

مباراة الدخول إلى المراكز التربوية الجهوية – دورة شتنبر 2011
الموضوع
التخصص : الرياضيات
مادة الاختيار : موضوع في الرياضيات

EXERCICE 2 (4.5 points)

Soit x un nombre réel strictement positif.
On considère la série de terme général $u_n(x)$ tel que : $u_n(x) = ne^{-nx}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

0.5pt 1) a- Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n(x) = 0$

√1pt b- Montrer qu'il existe un entier p de $\mathbb{N}^*$ tel que : $(\forall n \geq p)\quad u_n(x) \leq \dfrac{1}{n^2}$

√0.5pt c- En déduire que la série de terme général $u_n(x)$ est convergente.

2) Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on pose $v_n(x) = \int_x^{+\infty} u_n(t)\,dt$.

1pt a- Démontrer que l'intégrale $v_n(x)$ est convergente.

√0.5pt b- Démontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\quad v_n(x) = e^{-nx}$

1pt c- Démontrer que la série de terme général $v_n(x)$ est convergente et calculer sa somme.

EXERCICE 3 (8.5 points)

les questions 1) , 2) , 3) et 4) sont indépendantes.

1) On rappelle que : $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

1pt a- Démontrer que : $\sum\limits_{k=1}^{k=n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2pt b- Calculer : $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2$

√2pts 2) Soit z un nombre complexe différent de 1 et de module 1. Montrer que : $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$

3) On considère dans $\mathbb{R}_2[X]$ les polynômes suivants :

$P_1(X) = X^2 - 1$, $P_2(X) = X^2 + X - 1$ et $P_3(X) = X^2 + X$

√1.5pt Montrer que la famille (P_1, P_2, P_3) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

√1pt 4) a- Démontrer que si n est un entier impair, alors le nombre $7^n + 1$ est divisible par 8 .

1pt b- Dans le cas où n est pair, donner le reste de la division euclidienne du nombre $7^n + 1$ par 8 .