

الصفحة
1 / 2

مباراة الدخول إلى المراكز التربوية الجهوية
دورة يوليوز 2010
الموضوع

المملكة المغربية



وزارة التربية الوطنية
التعليم العالي
البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

المعامل:	2	التخصص:	الرياضيات
مدة الإنجاز:	ساعتان ونصف	مادة الاختبار:	موضوع في الرياضيات

Exercice 1 (6,5 points)

On pose pour tout entier naturel n non nul : $a_n = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{1}{n+k}$

1 pt a) Etudier le sens de variation de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ puis sa convergence.

1 pt b) Etablir que : $(\forall p \in]0; +\infty[) \quad \frac{1}{p+1} \leq \ln(p+1) - \ln(p) \leq \frac{1}{p}$

1 pt En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad a_n - \frac{1}{n} \leq \ln 2 \leq a_n - \frac{1}{2n}$

0,5pt Préciser alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

c) On pose pour tout entier naturel n non nul : $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

1 pt Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad S_{2n} = a_n - \frac{1}{n}$

2pt Qu'en déduit-on pour la série harmonique alternée ?

Exercice 2 (3,5 points)

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $f(x) = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$

1 pt a) Déterminer l'ensemble de définition D de f .

2 pt b) Montrer que f est dérivable sur D puis calculer $f'(x)$ pour $x \in D$.

0,5pt c) En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout x de D .

Exercice 3 (10 points)

On considère la matrice réelle d'ordre 3 : $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et on note φ l'endomorphisme de

\mathbb{R}^3 dont la matrice est A , dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de \mathbb{R}^3 .

2pt 1) a- Déterminer le noyau de φ . En déduire que 0 est une valeur propre de φ .

2pt b- Déterminer l'image de φ .

1pt 2) a- Montrer que la matrice A est diagonalisable.

3pt b- Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres de φ .

c- On pose : $u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3$; $u_2 = e_1 + e_2$; $u_3 = e_1 - e_2 + e_3$

2pt Montrer que $B' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 et déterminer la matrice A' de φ dans cette base.