المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

مباراة الدخول إلى مسلك تأهيل أساتذة التعليم
الثانوي الإعدادي بالمراكز الجهوية لمهن
التربية والتكوين – دورة يوليوز 2012
الموضوع

المجال	مادة التخصص المدرسة : الرياضيات	المعامل:	1
		مدة الإنجاز:	4 ساعات

N.B :
Il est interdit d'utiliser la calculatrice, le téléphone portable, tout matériel électronique et toute documentation.

Exercice 1 : (4points)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,dx$.

0,25 1. Calculer I_0 et I_1.

0,5 2. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$.

0,25 3. En déduire que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

0,5 4. Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N})\ I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+2}$.

5.

0,5 a) Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 2(-1)^{n-1} I_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2 .$$

0,5 b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

6.

0,5 a) A l'aide d'une intégration par parties ,montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ I_n = \frac{1}{4(n+1)} + \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx$$

0,25 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{(1+x^2)^2}\,dx \leq \frac{1}{2n+4}$.

0,25 c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.

0,5 d) Donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \ln 2$ quand $n \to +\infty$.

2

<u>Exercice 2</u> : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(0)=1 \; et \; f(x)=\frac{x}{e^x-1} \; si \; x\neq 0$$

1.

0,5 a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

0,5 b) Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0)=-\frac{1}{2}$

2. Soit g la fonction définie par

$$g(x)=e^x-xe^x-1$$

0,5 a) Montrer que pour tout x non nul, $g(x)<0$

0,25 b) Déterminer le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$

0,25 c) Etudier les branches infinies de f.

0,5 d) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

3.

0,25 a) Vérifier que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera. On note f^{-1} sa réciproque.

0,25 b) Construire la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère que celle de f.

0,25 c) Préciser $f^{-1}(1)$ et construire la tangente au point d'abscisse 1 de la courbe représentative de f^{-1}.

4. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, notons (E_n) l'équation : $f(x)=n$

0,5 a) Montrer que l'équation (E_n) a une unique solution u_n.

0,25 b) Trouver la valeur de u_1.

1 c) Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et calculer sa limite.

1 d) Justifier que : $u_n \sim -n \; en \; +\infty$.

2

Exercice 3 : (5points)

On considère les éléments suivants de

$M_3(\mathbb{R})$: $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$; $J=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$; $K=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

On note E le sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par I,J et K .

Pour toute matrice M de E , on note $M^0=I$, et si M est inversible ,on note ,
Pour tout entier naturel k, $M^{-k}=\left(M^{-1}\right)^k$, et on rappelle qu'alors M^k est inversible et que $\left(M^k\right)^{-1}=M^{-k}$.

1 1. Déterminer la dimension de E .

1 2. Calculer J^2, JK, KJ et K^2 .

1 3. Soit la matrice $L=I+J$.

a) Montrer que pour tout entier naturel :

$$L^n=I+nJ+\frac{n(n-1)}{2}K \;;$$

1 b) Vérifier que L est inversible et montrer ,pour tout entier relatif n :

$$L^n=I+nJ+\frac{n(n-1)}{2}K \;.$$

1 c) Exprimer , pour tout entier relatif n , L^n à l'aide de I, L, L^2 et n.

Exercice 4 : (5 points)

Le plan complexe P est rapporte au repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1.

0,5 a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2-4z+8=0$$

0,5 b) Ecrire les solutions z_1 et z_2 de cette équation sous forme exponentielle

(z_1 est la solution dont la partie imaginaire est positive)

0,5 c) Placer dans $\mathcal{P}$ les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 .

2. On considère l'application f , qui ,à tout point M ,d'affixe z ,associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{1}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué de z .

0,5 a) Calculer les affixes des points A' et B' images de A et B par f .

0,25 b) Placer dans P les points A' et B'.

0,5 c) Montrer que pour tout point M distinct de O, les points O, M et M' sont alignés et que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OM'} = 1$.

3.

1 a) Montrer que : $|z-2| = 2 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{2} - z'\right| = |z'|$.

Soit C le cercle de centre I, d'affixe 2 , et de rayon 2 .

Soit M un point de C distinct de O.

0,5 b) Montrer que M' est situé sur une droite d que l'on caractérisera .

0,25 c) Placer dans P, C et d .

Soit M un point quelconque du cercle C ,distinct de O , A et B.

0,5 d) Construire M', l'image de M par f .