

الاشتقاق

العدد المشتق في نقطة

(1) نشاط

احسب $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ في كل حالة من الحالات التالية

أ- $x_0 = 1$ $f : x \mapsto x + 1$

ب- $x_0 = -2$ $f : x \mapsto x^2 + x$

ج- $x_0 = 2$ $f : x \mapsto \frac{x-1}{2x+1}$

(2) الجواب

أ-

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 1 - 2}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x - 1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

العدد 1 يسمى العدد المشتق للدالة f في النقطة 1 و نرمز له بالرمز $f'(1)$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

ب-

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{x - (-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} x - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

بما أن $f'(-2) = -3$ عدد ينتمي إلى $\mathbb{R}$ أي منته فإن f دالة قابلة للاشتقاق في -2

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x-1}{2x+1} - \frac{1}{5}}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{5x-5-2x-1}{5(2x+1)}}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x-6}{5(2x+1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{5(2x+1)} \times \frac{1}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{5(2x+1)} \\
&= \frac{3}{25}
\end{aligned}$$

(3) تعريف

لتكن f دالة عددية و x_0 عددا حقيقيا من مجال ضمن مجموعة تعريفها D_f .

- نقول إن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة x_0 ، إذا كانت النهاية $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ منتهية. وتسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة f في النقطة x_0 و نرمز له بالرمز $f'(x_0)$.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- المعادلة $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ تسمى معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0

(4) تمرين تطبيقي

حدد معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها x_0 .

$$(1) \quad x_0 = 1; f(x) = x^2 + 1$$

$$(2) \quad x_0 = 0; f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x + 1$$

$$(3) \quad x_0 = 2; f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

(5) الجواب

(1) بما أن :

$$\begin{aligned}
f'(1) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1 - 2}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

فإن معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها 1 هي: $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

أي

$$y = 2x \quad y = 2(x - 1) + 2$$

(2)

بما أن :

$$\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 - 2x + 1 - 1}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 - 2x}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\left(\frac{1}{3}x^2 - 2\right)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3}x^2 - 2 \\
&= -2
\end{aligned}$$

فإن معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها 0 هي: $y = f'(0)x + f(0)$ أي

$$y = -2x + 1$$

(3) بما أن :

$$\begin{aligned}
f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{x-1}{x+2} - \frac{1}{4}}{x - 2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x - 4 - x - 2}{4(x+2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x - 6}{4(x+2)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x-2)}{4(x+2)} \times \frac{1}{x-2} \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{4(x+2)} \\
&= \frac{3}{16}
\end{aligned}$$

فإن معادلة المماس لمنحنى الدالة f في النقطة التي أفصولها 2 هي:

$$y = \frac{3}{16}x - \frac{1}{8} \quad \text{أي} \quad y = \frac{3}{16}(x-2) + \frac{1}{4} \quad \text{أي} \quad y = f'(2)(x-2) + f(2)$$

(6) الدالة المشتقة لبعض الدوال

أتعريف

لتكن f دالة عددية و E مجموعة قابلية اشتقاقها. الدالة التي تربط كل عنصر x من E بعدده المشتق تسمى الدالة المشتقة للدالة f

ب-

الدالة المشتقة لبعض الدوال

$$(1) \quad \boxed{f: x \mapsto a \quad \text{(دالة ثابتة)} \quad f': x \mapsto 0 \quad \text{(الدالة المشتقة منعدمة)}}$$

للبرهان على ذلك نختار عنصر x_0 من مجموعة قابلية اشتقاق الدالة f و نحسب $f'(x_0)$.

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a - a}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \rightarrow x_0} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$(2) \quad \boxed{f: x \mapsto kx \quad f': x \mapsto k}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{kx - kx_0}{x - x_0} \\
 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{k(x - x_0)}{x - x_0} \\
 &= k
 \end{aligned}$$

$$f' : x \mapsto nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \quad f : x \mapsto x^n \quad (3)$$

يمكنك التأكد من ذلك من أجل $n=2$ و $n=3$ مثلاً.

7) العمليات على الدوال المشتقة

الدالة	الدالة المشتقة
$f + g$	$f' + g'$
$(\lambda \in \mathbb{R}) \lambda f$	$\lambda f'$
$(n \in \mathbb{N}^*) f^n$	$nf^{n-1} \times f'$
$(f \neq 0) \frac{1}{f}$	$\frac{-f'}{f^2}$
$(g \neq 0) \frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$

8) تمرين

حدد الدالة المشتقة للدالة f في كل من الحالات التالية :

$$f(x) = (x-4)(x+3)$$

$$f(x) = (3x+2)^2(2x+1)$$

$$f(x) = (x^2 - 1)^5$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$$

$$f(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2} \right)^6$$

الجواب

$$\begin{aligned} f'(x) &= [1 \times (x+3)] + [(x-4) \times 1] \\ &= x+3+x-4 \\ &= 2x-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= [2(3x+2) \times 3 \times (2x+1)] + [(3x+2)^2 \times 2] \\ &= 2(3x+2)[3 \times (2x+1) + (3x+2)] \\ &= 2(3x+2)(9x+5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(x^2-1)^4 (2x) \\ &= 10x(x^2-1)^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(2x-1) - 2(2x+1)}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{4x-2-4x-2}{(2x-1)^2} \\ &= \frac{-4}{(2x-1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 6 \left(\frac{x^2-1}{x+2} \right)^5 \times \frac{2x(x+2) - (x^2-1)}{(x+2)^2} \\ &= 6 \left(\frac{x^2-1}{x+2} \right)^5 \times \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

9) رتبة دالة و إشارة مشتقتها

لتكن f دالة عددية لمتغير حقيقي قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I ضمن مجموعة تعريفها D_f .

- أ- تكون الدالة f تزايدية على المجال I إذا وفقط إذا كانت لكل عنصر x من المجال I ، $f'(x) \geq 0$
- ب- تكون الدالة f تناقصية على المجال I إذا وفقط إذا كانت لكل عنصر x من المجال I ، $f'(x) \leq 0$
- ت- تكون الدالة f ثابتة على المجال I إذا وفقط إذا كانت لكل عنصر x من المجال I ، $f'(x) = 0$

10) تمرين

ادرس رتبة الدالة f انطلاقا من إشارة مشتقتها في كل من الحالات التالية:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3$$

$$f(x) = x^3 - 1$$

$$f(x) = \frac{2x - 1}{2x - 3}$$

$$f(x) = \frac{-2x}{2x - 3}$$