www.9alami.com

الفهرس

تمرين1	تمرين2	تمرين3	تمرين4	تمرين5	تمرين6	تمرين7	تمرين8	تمرين9
الحل	الحل	الحل	الحل	الحل	الحل	الحل	الحل	الحل
تمرين10	تمرين11	تمرين12	تمرين13	تمرين14	تمرين15	تمرين16	تمرين17	تمرين18
الحل	الحل	الحل	الحل	الحل	الحل	الحل	الحل	الحل

تمرين 1:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x حيث : $f(x)=(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

1- أ-) تحقق أن : $D_f=]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$

ب-) احسب نهايات f عند محدات D_f

2- أ-) ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار في 1- .

ب-) بين أن لكل x من $Df=]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$: $f'(x)=\frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$

ج-) اعط جدول تغيرات الدالة f.

3- ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i};\vec{j})$.

أ-) بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+2$ مقارب مائل ل (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ب-) انشيء (C) .

تمرين 2:

لتكن الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على $]-\infty,4]$ بما يلي :

$$f(x)=x-4+2\sqrt{4-x}$$

(C) هو منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(0,\vec{i},\vec{j})$

1- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

2- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يسار $x_0=4$ ثم أول هندسيا النتيجة المحصلة .

3- أ-) بين أنه لكل x من $]-\infty,4[$: $f'(x)=\frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{4-x}}$

ب-) ادرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات f .

4- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

5- حدد نقط تقاطع المنحنى (C) ومحور الأفاصيل .

6- اعط معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) عند النقطة ذات الأفصول 0.

7- احسب $f(-5)$ ثم انشيء المستقيم (T) والمنحنى (C) (الوحدة 1cm) .

تمرين 3:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة ب : $f(x)=\frac{1}{x^2+x}-\sqrt{x^2+x}$

و (C) منحناها في معلم متعامد منظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- بين أن $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$ هي مجموعة تعريف الدالة f .

2- حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

3- بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة : $x=-\frac{1}{2}$ هو محور تماثل ل (C) .

4- بين أن $\left(\forall x\in]0,+\infty[\right)\ ;\ f'(x)=-(2x+1)\left(\frac{1}{(x^2+x)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\right)$

5- ضع جدول تغيرات الدالة f في المجال $]0,+\infty[$.

6- حدد الفرع اللانهائي ل (C) بجوار $+\infty$

7- حل في $]0,+\infty[$ المعادلة $f(x)=0$.

8- أنشىء (C).

تمرين 4:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}}$

(C) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- حدد D حيز تعريف f واحسب نهايتي f عند محدي D .

2- حدد الفرعين اللانهائيين ل (C) .

3- أ) احسب f'(x) وتحقق أنه لكل x من D : $f'(x)=x(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

ب) حدد جدول تغيرات f .

4- أ) احسب f"(x) لكل x من D .

ب) بين أن $A\left(1,\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ نقطة انعطاف (C) .

5- أنشىء (C) وحدة القياس : 2 cm.

6- لتكن g قصور f على المجال $I=\left]-\frac{1}{2},0\right]$

أ) بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده .

ب) حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 5:

I- نعتبر الدالة العددية h للمتغير الحقيقي x بحيث : $h(x) = 3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4}$

1- اعط جدول تغيرات الدالة h على $\mathbb{R}^+$.

2- استنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad h(x) \le 0$

II- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي :

$$f(x) = (4x-1)\sqrt{x} - 4x^2 + \frac{1}{2}$$

(C) يرمز للمنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ الوحدة : 2 cm

1- ادرس قابلية اشتقاق الدالة f عند النقطة $x_0 = 0$ على اليمين واعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

2- أ) بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^{*+}) \quad f'(x) = \frac{2h(x)}{\sqrt{x}}$

ب) اعط جدول تغيرات f (لحساب نهاية الدالة f عندما يؤول x إلى $+\infty$ يمكنك استعمال المتساوية : $f(x) = x^2\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x\sqrt{x}} - 4 + \frac{1}{2x^2}\right)$ لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$) .

ج) ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) .

3- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

أ) بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يتم تحديده .

ب) استنتج أن المعادلة $x \in I \quad g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α ثم تحقق من أن $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$

4- انشيء في نفس المعلم R المنحنى (C) الممثل للدالة f والمنحنى (Γ) الممثل للدالة العكسية g^{-1} للدالة g (نقبل أن للمنحنى (C) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{1}{4}$) .

تمرين 6:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ كما يلي : $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم .

1- حدد نهاية f عند $+\infty$ ونهايتها عند $-\infty$

2- أ) ادرس قابلية إشتقاق الدالة f على اليمين في 1 وعلى اليسار في 1- واعط تأويلا هندسيا للنتيجتين .

ب) حدد الدالة المشتقة للدالة f .

ج) بين أن $f'(x) > 0$ لكل x من $]1,+\infty[$ وأن $f'(x) < 0$ لكل x من $]-\infty,-1[$

د) ضع جدول تغيرات f.

3- أ) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y = 2x$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$.

ب) أنشيء المنحنى (C).

4- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [1,+\infty[$.

أ) بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال ينبغي تحديده .

ب) انشيء المنحنى الممثل للدالة g^{-1} في المعلم أعلاه .

تمرين 7:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=2x-\frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$

و (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

1- أ- حدد D مجموعة تعريف الدالة f .

ب- بين أن الدالة f فردية . نأخذ $I=]0,+\infty[$ مجال دراسة الدالة f .

2- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

3- أ- بين أنه لكل x من I : $f(x)-(2x-1)=\frac{-3}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)}$

ب- استنتج أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل بجوار $+\infty$.

ج- حدد وضعية المنحنى (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) على I .

4- أ- بين أنه لكل x من I : $f'(x)=2+\frac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f على I .

5- أ- حدد نقطة تقاطع (C) مع محور الأفاصيل على المجال I. ثم اعط معادلة المماس للمنحنى (C) في هذه النقطة .

ب- نقبل أن إشارة $f''(x)$ هي عكس إشارة x لكل x من D . وأن قيمة مقربة للعدد الموجب α الذي يحقق $f(\alpha)=\alpha$ هي 1,52 . أنشىء (C) . (نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$) معللا إنشاءك على المجال $]-\infty,0[$.

6- ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]0,+\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال ينبغي تحديده .

ب- أنشىء (C') منحنى g^{-1} الدالة العكسية للدالة g (في نفس المعلم).

تمرين 8:

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]-2,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=2\sqrt{(x+2)(x-3)}$

1- أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} \frac{f(x)}{x+2}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x>3}} \frac{f(x)}{x-3}$ و $\lim\limits_{\substack{x\to3\\x<3}} \frac{f(x)}{x-3}$

2- أ- بين أن إشارة $f'(x)$ على $]-2,3[$ هي إشارة $(1-2x)$ ، وأن f' موجبة قطعا على $]3,+\infty[$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

3- ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

وليكن (D) المستقيم ذا المعادلة $y=2x-1$.

أ- بين أن المستقيم (D) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (D) على المجال $]3,+\infty[$

ج- ارسم (C) .

تمرين 9:

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x)=x+\sqrt{x^2+2x}$

1- حدد D مجموعة تعريف الدالة f ثم احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ وأول النتيجة هندسيا .

3- ادرس قابلية اشتقاق f في 2- على اليسار و في 0 على اليمين .

4- أ) بين أنه لكل x من $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{x+1+\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt{x^2+2x}}$

ب) استنتج أن f تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$ وتناقصية قطعا على $]-\infty,-2]$

5- ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

أ) بين أن المستقيم ذا المعادلة $y=2x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب) أنشىء (C) .

6- ليكن g قصور الدالة f على $]0,+\infty[$

أ) بين أن g تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو مجال J ينبغي تحديده .

ب) لكل x من J حدد $g^{-1}(x)$ بدلالة x .

تمرين 10:

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

a-1- حدد D حيز تعريف الدالة f .

b-احسب كلا من النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)$

a-2 – تحقق من أن :

$$\forall x\in D: f(x)-\left(\frac{x+1}{2x}\right)=\frac{x+1}{2x}\left(\frac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)$$

b- استنتج أن المستقيم $(\Delta_1): y=\dfrac{x+1}{2}$ مقارب مائل ل (C) بجوار $+\infty$

C – بين أن $(\Delta_2): y=-\dfrac{x+1}{2}$ مقارب مائل ل (C) بجوار $-\infty$

a-3- بين أن $f'(x)=\dfrac{x^3-27}{2x^2\sqrt{x^2+27}}$ لكل x من D .

b- تحقق من أن f تزايدية على المجال $]3,+\infty[$ وتناقصية على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,3]$.

c- اعط جدول تغيرات الدالة f .

a-4 – حدد تقاطع (C) مع محور الأفاصيل.

b- نقبل أن $A(x_0,y_0)$ حيث $x_0\approx-5,2$ و $y_0\approx2,9$ هي نقطة الانعطاف الوحيدة للمنحنى (C) وأن f'(x) سالبة على المجال $]x_0,0]$ وموجبة على كل من المجالين $]-\infty,x_0]$ و $]0,+\infty[$. نأخذ $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$

أنشئ C .

تمرين11:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي:

$$f(x)=\frac{2x^2-1}{x^3}.\sqrt{1+x^2}$$

وليكن (ζ) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- حدد D مجموعة تعريف الدالة f، وتحقق من أن f فردية.

2- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}} f(x)$ وأول هندسيا النتيجتين المحصل عليهما .

3- بين أنه لكل x من D لدينا : $f'(x)=\frac{3}{x^4.\sqrt{1+x^2}}$. واستنتج تغيرات f .

4- أنشئ (ζ).

5- ليكن g قصور الدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

أ- بين أن g تقابل من $]0,+\infty[$ نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب- بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق على J . (g^{-1} هي الدالة العكسية للدالة g)

ج- أنشئ (ζ') المنحنى الممثل للدالة g^{-1} .

تمرين12:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ ب : $f(x)=6x^{\frac{2}{3}}-4x$

1- احسب $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x\succ0}} \frac{f(x)}{x}$. أول هندسيا النتيجة .

2- حدد الفرع اللانهائي ل (ζ) منحنى f .

3- احسب f'(x) لكل x من $]0,+\infty[$ ثم حدد جدول تغيرات f .

4-أ- حدد نقطتي تقاطع (ζ) مع محور الأفاصيل.

ب- حدد معادلة (Δ) مماس (ζ) في النقطة ذات الأفصول $\frac{27}{8}$

ج- أنشئ (Δ) و (ζ) في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

(وحدة القياس : 1 cm).

5- g قصور f على المجال $I=[1,+\infty[$

بين أن g تقابل من I نحو مجال يتم تحديده . احسب $(g^{-1})'(0)$.

تمرين13:

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR بما يلي:

$$f(x)=(\sqrt{1+x^2}-x)^2$$

(ζ) هو منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1-أ- احسب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

ب- بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2-أ- بين أن لكل x من IR : $f'(x)=\dfrac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

ب- أثبت أن $f'(x)\neq 0$ لكل x من IR ثم ضع جدول تغيرات الدالة f .

3- بين أن $\lim\limits_{n\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$ ثم استنتج الفرع اللانهائي ل (ζ) جوار $-\infty$

4-أ- اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (ζ) في النقطة ذات الأفصول 0.

ب- أنشئ المستقيم (T) والمنحنى (ζ) (الوحدة 2cm)

5-أ- بين أن f تقابل من IR نحو مجال J يتم تحديده.

ب- احسب $(f^{-1})'(1)$

ج- احسب f'(x) لكل x من J .

تمرين14:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=x-2+\sqrt[3]{x^2+1}$$

وليكن (ζ) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

ب- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (ζ)

2-أ- بين أن : $(\forall x\in[0,+\infty[)\ ,\ f'(x)=\dfrac{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

3- بين أن f تقابل من $[0,+\infty[$ نحو مجال I يجب تحديده

4-أ- بين أن المعادلة f(x) =0 تقبل حلا وحيدا α بحيث $\frac{1}{2}\prec\alpha\prec 1$ (دون حساب α).

ب- حدد نقطة تقاطع (ζ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته y =x .

ج- أنشئ (ζ) ثم (ζ') منحنى الدالة f^{-1} التقابل العكسي للدالة f .

تمرين15:

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR^* بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=-x+\dfrac{2}{x} & (x\in]-\infty,0[\cup]0,1[) \\ f(x)=\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}} & (x\in [1,+\infty[\end{cases}$$

1- بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0=1$

2-أ- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0=1$ على اليسار .

ب- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند النقطة $x_0=1$ على اليمين (لاحظ أن $(1+x-2\sqrt{x}=(\sqrt{x}-1)^2$

3- أ- بين أن $(\forall x\in]-\infty,0[\cup]0,1[)\quad f'(x)\prec 0$

ب- بين أن $(\forall x\in]1,+\infty[)\quad f'(x)=\dfrac{x-1}{4\sqrt{x}}$

ج- اعط جدول تغيرات الدالة f.

4- ليكن (ζ) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

أ- ادرس الفروع اللانهائية للمنحنى (ζ).

ب- أنشئ المنحنى (ζ) (نقبل أن للمنحنى (ζ) نقطة انعطاف وحيدة أفصولها 3)

تمرين16:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x-1+2\sqrt{1-x};\ x\le 1 \\ f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^3+3} \quad ;x\ge 1 \end{cases}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ وبين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2- ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين وعلى اليسار في 1 ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما.

3- أ- بين أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

بين أن $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$ لكل x من $]-\infty,1[$

ج- اعط جدول تغيرات الدالة f .

4-أ- ادرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)

ب- ارسم المنحنى (C) (لاحظ أن f(-3)=0

5- لتكن g قصور الدالة f على المجال $[1,+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $[1,+\infty[$ نحو مجال I ينبغي تحديده.

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من المجال I .

ج- بين أن g^{-1} هي دالة أصلية للدالة $x\to\dfrac{2}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}}$ على المجال

تمرين17:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي:

$$f(x)=x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

وليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1-أ- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$

ب- حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C)

2- بين أن : $f'(x)=\left(\frac{2x+\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}-1)$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f .

3-أ- ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ) ذي المعادلة y=x .

ب- ارسم المنحنى (C) ($f(4)=\frac{5}{2}$ و $f(\frac{1}{4})=\frac{7}{4}$)

4- لتكن g قصور الدالة f على المجال $[1,+\infty[$

أ- بين أن g تقبل دالةعكسية g^{-1} وحدد مجموعة الدالة g^{-1}

ب- ارسم في نفس المعلم $(o,\vec{i},\vec{j})$ ، المنحنى الممثل للدالة g^{-1} .

5- نعتبر المتتالية العددية $(a_n)_{n\in IN}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} a_0=2 \\ a_{n+1}=f(a_n) \end{cases}$

تمرين18:

أ- بين ان : $(\forall n\in IN)\quad a_n\succ 1$

ب- بين أن المتتالية $(a_n)_{n\in IN}$ تناقصية.

ج- استنتج أن المتتالية $(a_n)_{n\in IN}$ متقاربة ثم حدد نهايتها.

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=x-2\sqrt{x-1} & ;x\geq 1 \\ f(x)=x+2\sqrt{x-x} & ;x\prec 1 \end{cases}$$

وليكن (C) منحناها في م.م.م $(o,\vec{i},\vec{j})$

1- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2-أ- ادرس اتصال f في 1.

ب- ادرس قابلية اشتقاق f على اليمين وعلى اليسار في 1، ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما.

3-أ- احسب f'(x) لكل x من $IR-\{1\}$

ب- اعط جدول تغيرات f .

4-أ- حدد الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C) .

ب- حدد تقاطع المنحنى (C) مع محور الأفاصيل.

ج- ارسم المنحنى (C)

5- لتكن g الدالة الأصلية للدالة f على المجال $[2,+\infty[$ والتي تحقق $g(2)=\frac{2}{3}$

أ- اكتب g(x) بدلالة x

ب- اعط جدول تغيرات الدالة g .

تمرين 1:

1-أ-) $x \in Df \Leftrightarrow (x+1)(x-1) \geq 0$ و $x \neq 1$

$\Leftrightarrow [x \leq -1$ أو $x \geq 1)$ و $x \neq 1]$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[$

إذن $D_f =]-\infty,-1] \cup]1,+\infty[$

ب-) $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

بما أن $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$

فإن $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$

و $f(-1) = 0$

2- أ-) $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1^-} \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} = 0$

إذن f قابلة للاشتقاق عل اليسار في 1-.

و $f'_g(-1) = 0$

ب-) $x \in D_f - \{-1\}$

$$f'(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + (x+1)\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

$$= \frac{(x-1)^2 \frac{x+1}{x-1} - (x+1)}{(x-1)^2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}$$

إذن

لكل x من $D_f - \{-1\}$ $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)^2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}}$

ج-) إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x+1)(x-2)$

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
f'(x)		$+$	0		‖	$-$	0	$+$	
f(x)	$-\infty$	↗	0		‖	↘	$3\sqrt{3}$	↗	$+\infty$

$f(2) = 3\sqrt{3}$

3-أ-)

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=\lim_{|x|\to+\infty}(x+1)\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-(x+2)$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{(x+1)^2\dfrac{x+1}{x-1}-(x+2)^2}{(x+1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+(x+2)}$$

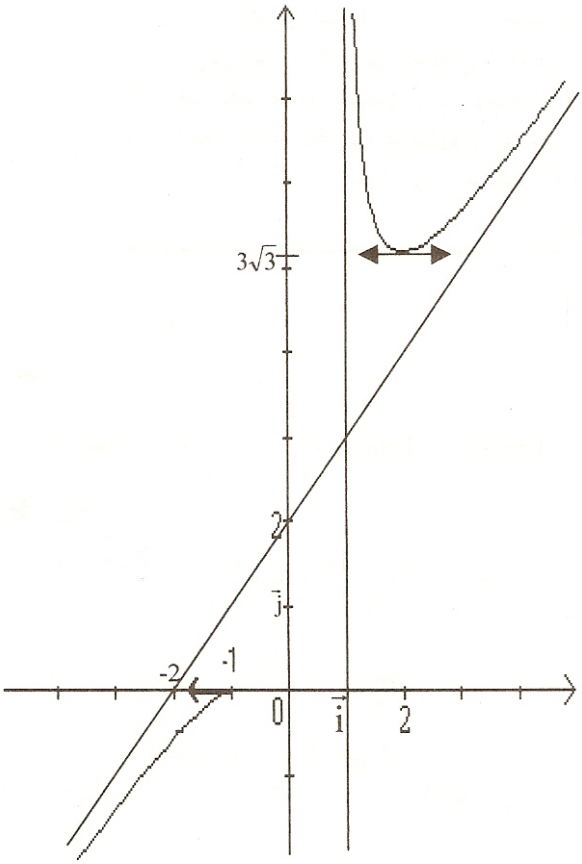
$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3x+5}{(x^2-1)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{|x|\to+\infty}\frac{3+\dfrac{5}{x}}{(x-\dfrac{1}{x})\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}+(1+\dfrac{2}{x})(x-1)}=0$$

إذن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x+2$

مقارب ل (C) بجوار $+\infty$ و $-\infty$

ب) إنشاء (C)



تمرين 2:

1- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(x-4)\left[-1+\dfrac{2}{\sqrt{4-x}}\right] = -\infty$

2-

$$\lim_{\substack{x\to4\\x\prec4}}\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{\substack{x\to4\\x\prec4}}\frac{x-4+2\sqrt{4-x}}{x-4}$$

$$= \lim_{\substack{x\to4\\x\prec4}}\left(1-\frac{2}{\sqrt{4-x}}\right) = -\infty$$

f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 4

يقبل (C) نصف مماس في النقطة A(4,0) يوازي محور الأراتيب.

3-أ-) لكل x من $]-\infty,4[$

$$f'(x) = 1+2\frac{-1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$= 1-\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{\sqrt{4-x}-1}{\sqrt{4-x}}$$

ب-) إشارة f'(x) هي إشارة $\sqrt{4-x}-1$

$$\sqrt{4-x}-1 = \frac{4-x-1}{\sqrt{4-x}+1} = \frac{3-x}{\sqrt{4-x}+1}$$

لدينا : $\forall x \prec 4 \quad \sqrt{4-x}+1 \succ 0$

إذن إشارة f'(x) هي إشارة $3-x$

$x \prec 3 \Leftrightarrow f'(x) \succ 0$

$3 \prec x \prec 4 \Leftrightarrow f'(x) \prec 0$

x	$-\infty$		3		4
f'(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	0

$$f(3) = -1+2 = 1$$

4- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\dfrac{4}{x}+\dfrac{2\sqrt{4-x}}{x}\right)$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{4}{x}-2\sqrt{\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}}\right) = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-4+2\sqrt{4-x}\right) = +\infty$$

إذن يقبل (C) فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذي المعادلته $y = x$

5- $x \prec 4$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x-4+2\sqrt{4-x} = 0$$

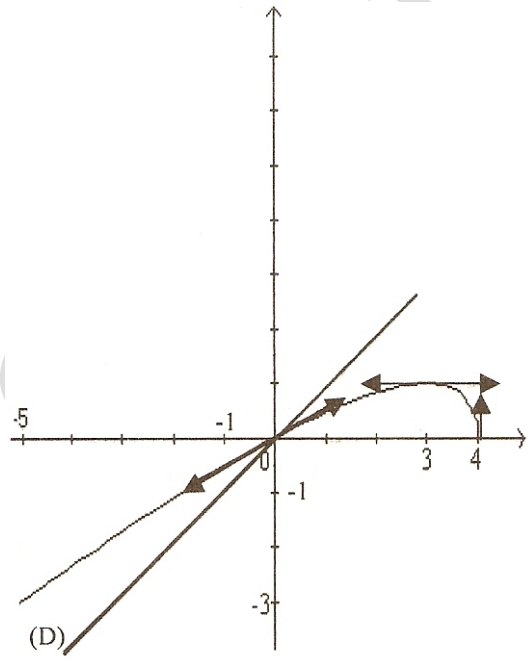
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4-x} = 4-x$$
$$\Leftrightarrow 4 = 4-x$$
$$\Leftrightarrow x = 0$$

إذن (C) يقطع محور الأفاصيل في أصل المعلم.

-6 $f(0) = 0$ و $f'(0) = \frac{1}{2}$

$$(T): y = \frac{1}{2}x$$

-7 $f(-5) = -3$



تمرين 3:

1- $x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + x \succ 0$

$\Leftrightarrow x(x+1) \succ 0$

$x \in \Leftrightarrow x \in]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

إذن $D_f =]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

2- نعلـــم أن

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2+x}$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

وبما أن $\lim_{x\to0^+} \sqrt{x^2+x} = 0$ و $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x^2+x} = +\infty$

فإن $\lim_{x\to0+} f(x) = +\infty$

3- $f\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)-x\right] = f(-1-x)$

$= \frac{1}{(x+1)^2-1-x} - \sqrt{(x+1)^2-1-x}$

$= \frac{1}{x^2+2x-1-x} - \sqrt{x^2+2x+1-1-x} = f(x)$

إذن $(\forall x \in D_f)\ f\left[2\left(-\frac{1}{2}\right)-x\right] = f(x)$

المستقيم (Δ) محور تماثل (C) .

4- ليكن x من D_f

$f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2} - \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$

$= -(2x+1)\left[\frac{1}{(x^2+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\right]$

5- $(\forall x \in D_f\ ]0,+\infty[) \frac{1}{(x^2+x)^2} + \frac{1}{2\sqrt{x^2+x}} \succ 0$

إذن تقبل $f'(x)$ إشارة عكس إشارة $2x+1$ على $]0,+\infty[$

بما أن : $(\forall x \rangle 0)\ \ 2x+1 \succ 0$

فإن : $\forall x \succ 0\ \ f'(x) \prec 0$

x	0		+∞
f'(x)	|	|	-
f(x)	|	|	+∞ ↘ −∞

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^3+x^2}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2+x}-\left[\sqrt{x^2+x}-x\right]\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$$

إذن $\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=-\frac{1}{2}$

وبالتالي فإن المستقيم (D) الذي معادلته $y=-x-\frac{1}{2}$ مقارب ل (c) بجوار $+\infty$

(-7 $f(x)=0$ $x\succ 0$

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+x}=\sqrt{x^2+x}$$

$$\Leftrightarrow(x^2+x)^2=1$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-1=0$$

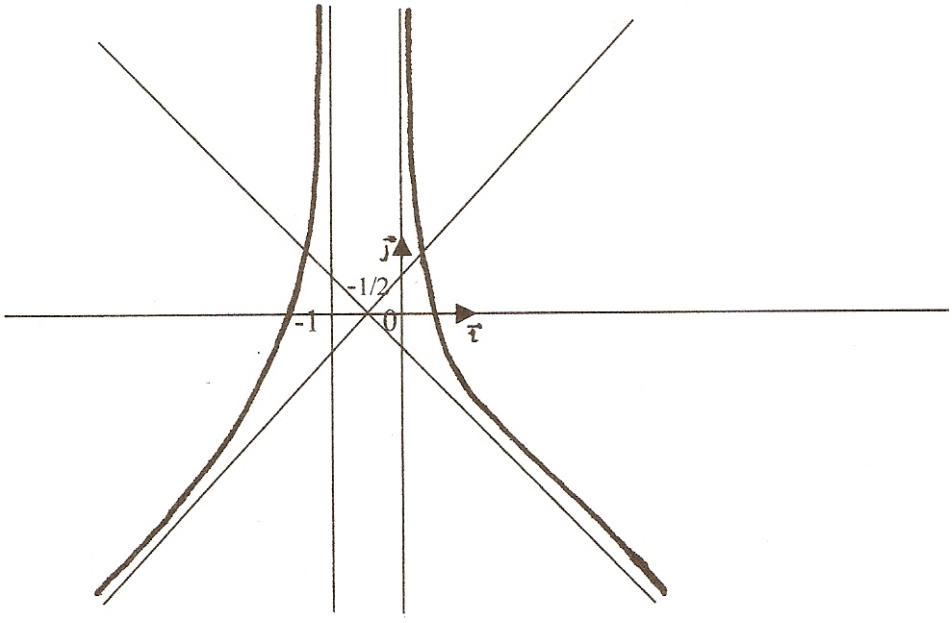
$$\Delta=1+4=5$$

إذن $x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(الحل $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ غير مقبول لأنه سالب)

$$S=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

$\left(A=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},0\right)$ هي نقطة تقاطع (C) ومحور الأفاصيل على $\mathbb{R}^{*+}$.



تمرين 4:

1- $x \in D \Leftrightarrow 2x+1 \succ 0$

$\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

$D = \left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

لدينا $\lim\limits_{x \to -\frac{1^+}{2}} (x+1) = \frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x \to -\frac{1^+}{2}} \sqrt{2x+1} = 0^+$

إذن $\lim\limits_{x \to -\frac{1^+}{2}} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

2- $(D): y = -\frac{1}{2}$ مقارب ل (C)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{2x+1}} = 0$$

إذن (C) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاصيل

3-أ) ليكن x من D .

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2x+1} - (x+1)\frac{1}{\sqrt{2x+1}}}{(2x+1)}$$

$$= \frac{2x+1-x-1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{x}{(2x+1)^{\frac{3}{2}}} = x(2x+1)^{\frac{-3}{2}}$$

ب)

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
f'(x)	‖	− 0	+
f(x)	‖ $+\infty$	↘ 1	↗ $+\infty$

4-أ) ليكن x من D .

$$f''(x) = (2x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} \times (2x+1)^{\frac{-5}{2}} \times 2$$

$$= (1-x)(2x+1)^{\frac{-5}{2}}$$

$$(\forall x \succ -\frac{1}{2})\ f''(x) = (1-x)(2x+1)^{\frac{-5}{2}}$$

ب-) $x \succ -\frac{1}{2}$

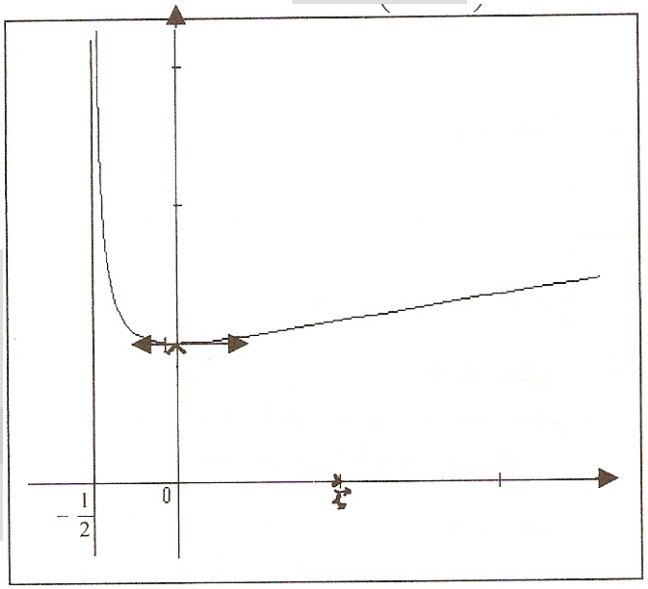
$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1-x \succ 0$$

$$\Leftrightarrow x \prec 1$$

إذن f' تنعدم وتغير الإشارة في $x_0 = 1$

$$f(1) = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ومنه فإن $A\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ نقطة انعطاف ل (C).



6-أ-) g دالة متصلة وتناقصية قطعا على I .

و $J = g(I) = [1, +\infty[$

ومنه فإن g تقابل من I نحو J.

ب-) ليكن x من I و y من J .

$$y = g(x) \Leftrightarrow \frac{x+1}{\sqrt{2x+1}} = y$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2+2x+1}{2x+1}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x(1-y^2) + 1 - y^2 = 0$$

$$\Delta' = y^2(y^2-1) \geq 0$$

إذن $x_1 = y^2 - 1 - y\sqrt{y^2-1}$ و $x_2 = y^2 - 1 + y\sqrt{y^2-1}$

الحل $x_1 = y^2 - 1 - y\sqrt{y^2-1}$ غير مقبول لأنه سالب .

إذن $x = x_2 = y^2 - 1 + y\sqrt{y^2-1}$

ومنه فإن : $g^{-1}(x) = x^2 - 1 + x\sqrt{x^2-1}$

تمرين 5:

I -1- $\forall x \succ 0 \quad h'(x) = 3(1-2\sqrt{x})$

$h'(x) \succ 0 \Leftrightarrow 1-2\sqrt{x} \succ 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} \prec \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 0 \prec x \prec \frac{1}{4}$

x	0		1/4		$+\infty$
h'(x)		+	0	-	
h(x)		↗	0	↘	

-2 $h\left(\frac{1}{4}\right)$ قيمة قصوية للدالة h .

إذن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad h(x) \le h\left(\frac{1}{4}\right)$

أي أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad h(x) \le 0$

II -1

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{4x-1}{\sqrt{x}} - 4x\right) = -\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.

يقبل (C) نصف مماس عمودي في النقطة ذات الأفصول 0

2-أ-) لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$

$$f'(x) = 4\sqrt{x} + (4x-1) \times \frac{1}{2\sqrt{x}} - 8x$$

$$= \frac{8x - 4x - 1 - 16x\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{12x - 16x\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{4\left(3x - 4x\sqrt{x} - \frac{1}{4}\right)}{2\sqrt{x}}$$

وباتالي فإن لكل x من $\mathbb{R}^{*+}$: $f'(x) = \frac{2h(x)}{\sqrt{x}}$

ب-)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2}=0$$

إذن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

x	0		$+\infty$
f'(x)	‖	-	
fx)	1/2	↘	$+\infty$

ج-) $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x\sqrt{x}}-4+\frac{1}{2x^2}\right)=-\infty$

يقبل (C)فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب .

3-أ-) g دالة متصلة وتناقصية قطعا على I .

إذن g تقابل من I نحو J .

$$J=g(1)\left]\lim_{x\to+\infty}g(x),g\left(\frac{1}{4}\right)\right]$$

ومنه $J=\left]-\infty,\frac{1}{4}\right]$

ب-) لدينا g تقابل من I نحو J و $0\in J$

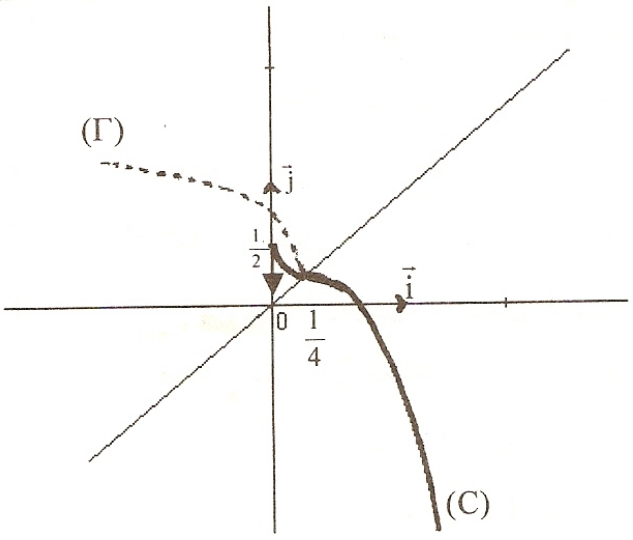
إذن 0 يقبل سابق وحيد في I .

يعني أن المعادلة $g(x)=0$ $x\in I$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا $g(\frac{1}{2})=\frac{2\sqrt{2}+1}{4}\succ 0$ و $g(\frac{3}{4})=\sqrt{3}-\frac{7}{4}\prec 0$

إذن $\alpha\in\left]\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right[$

-4



تمرين 6:

1- لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

يعني أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2-1)}{x-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$$

وبما أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-1}=+\infty$

فإن $\lim(x-\sqrt{x^2-1}=-\infty$

ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$

2-أ)

$$\lim\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\lim x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1}$$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right)=\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\left(1+\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=+\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\sqrt{x^2-1}=0^+$

$$\lim_{\substack{x\to1\\x>1}}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$$

وبالتالي فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 1 و (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأراتيب الموجبة عند النقطة $A(1,1)$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{x+\sqrt{x^2-1}+1}{x+1}$$

$$=\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\left(1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=-\infty$$

لأن $\lim\limits_{x\to-1}(x-1)=-2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\sqrt{x^2-1}=0^+$

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x<-1}}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=-\infty$$

الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار 1 و (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو محور الأراتيب الموجبة عند النقطة $B(-1,-1)$

ب-) $x\in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

$$f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\forall x\in]-\infty,1[\cup]1,+\infty[)\quad f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$$

ج-) لدينا : $(\forall x\in]+1,+\infty[)\sqrt{x^2-1}+x\succ 0$

وبالتالي فإن $(\forall x\in]1,+\infty[)f'(x)\succ 0$

إذن f دالة تزايدية على $]1,+\infty[$

$(\forall x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[)$

$$f'(x)=\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}-x)}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}(\sqrt{x^2-1}-x)}$$

$(\forall x\in]-\infty,-1[)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\succ 0$

إذن $(\forall x\in]-\infty,-1[)\ f'(x)\prec 0$

وبالتالي فإن f تناقصية على $]-\infty,-1[$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)	−	‖	+	
f(x)	0 ↘	‖	↗ $+\infty$	
		1	1	

3-أ-) $x\in]1,+\infty[$

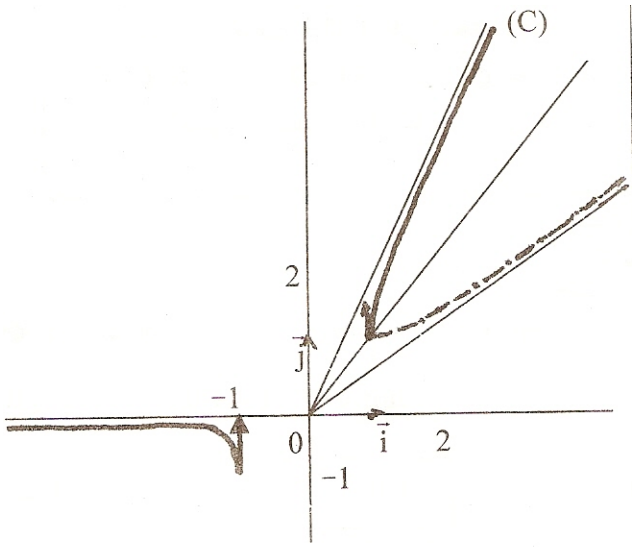
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0$$

لأن $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)=+\infty$

إذن المنحنى (C) يقبل مقارب بجوار $+\infty$ معادلته $y=2x$

ب-)



1- g دالة متصلة وتزايدية قطعا على I .

و $g(I)=I$

إذن g تقابل من I نحو I.

ومنه فإن g تقبل دالة عكسية

g^{-1} معرفة على I .

تمرين 7:

1-أ- $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

ب- إذا كان $x \in \mathbb{R}^*$ فإن $-x \in \mathbb{R}^*$

و $f(-x) = -2x - \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{-x}$

$= -2x + \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = -f(x)$

إذن $\forall \in \mathbb{R}^* \; f(-x) = -f(x)$

إذن f دالة فردية.

2- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - \dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)}}{x} \right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x - \sqrt{1+\dfrac{3}{x^2}} \right) = +\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

1-3- $x \in I$

$f(x) - (2x-1) = 2x - \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} - 2x + 1$

$= 1 - \dfrac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \dfrac{x - \sqrt{x^2+3}}{x}$

ب-

$f(x) - (2x-1) = \dfrac{x^2 - (x^2+3)}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)} = \dfrac{-3}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)}$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right) = +\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)} = 0$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-1)] = 0$

وبالتالي فإن (Δ) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ج- لدينا $(\forall x \in I) \; \dfrac{-3}{x\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)}$

أي أن $(\forall x \in I) \qquad f(x) \prec 2x-1$

إذن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $]0,+\infty[$

R

4-أ) $x \neq 0;\ f'(x) = 2 - \dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+3}} - \sqrt{x^2+3}}{x^2}$

$= 2 - \dfrac{x^2 - (x^2+3)}{x^2\sqrt{x^2+3}}$

$= 2 + \dfrac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$

$(\forall x \in I)\ \ f'(x) = 2 + \dfrac{3}{x^2\sqrt{x^2+3}}$

ب-)

x	0		$+\infty$
f'(x)	‖	+	
f(x)	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

5-أ) تقاطع (C) مع محور الأفاصيل على I .

$\begin{cases} x \in I \\ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in I \\ x^2 - \sqrt{x^2+3} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \sqrt{x^2+3} \\ x \in I \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - x^2 - 3 = 0 \\ x \in I \end{cases}$

المعادلة $4x^4 - x^2 - 3 = 0$ يؤول حلها إلى معادلة من الدرجة الثانية .

$4x^4 - x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow (x^2 = 1$ أو $x^2 = -\dfrac{3}{4})$

$\Leftrightarrow (x = 1$ أو $x = -1)$

$\left.\begin{matrix} f(x) = 0 \\ x \in I \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x = 1$

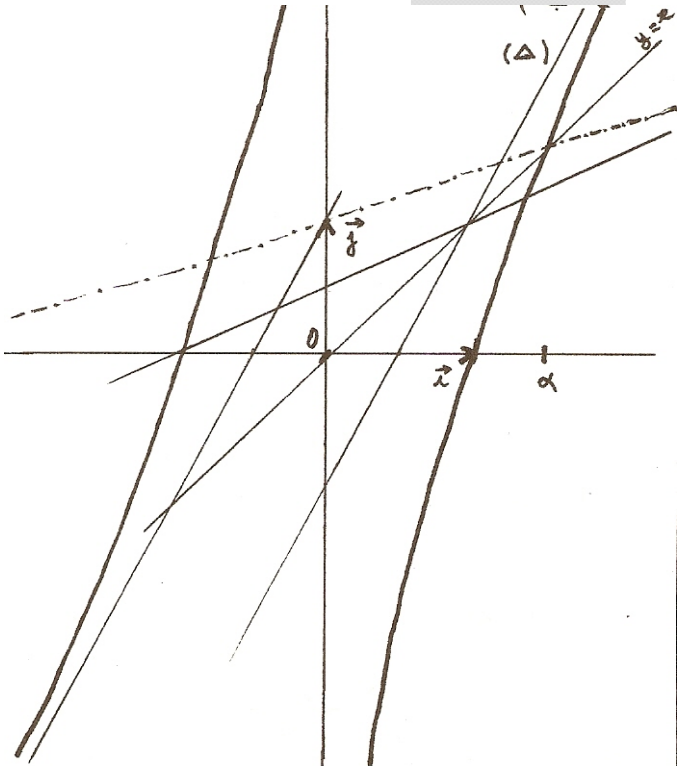
إذن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في النقطة $A(1,0)$ على المجال I

معادلة (T) مماس (C) عند النقطة A هي:

$y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$T : y = 3x - 3$

ب-



لدينا f' دالة فردية

إذن منحناها (C) متماثل بالنسبة للنقطة O أصل المعلم.

6-

g دالة متصلة وتزايدية قطعا على المجال I .

و $g(1) = \mathbb{R}$

إذن g تقابل من I نحو $\mathbb{R}$

تمرين 8:

1-أ)

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)(x-3)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

ب- $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\dfrac{f(x)}{x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\dfrac{2\sqrt{(x+2)(x+3)}}{x+2}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\dfrac{2(x+2)(x+3)}{(x+2)\sqrt{(x+2)(x+3)}}=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\dfrac{2(x+3)}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}$

بما أن $\lim\limits_{x\to-2}2(3-x)=10$

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\sqrt{(x+2)(x+3)}=0^+$

فإن $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x\succ-2}}\dfrac{f(x)}{x+2}=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\dfrac{f(x)}{x-3}=\lim\limits_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\dfrac{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}{x-3}$

$=\lim\limits_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\dfrac{2(x+2)}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x\succ3}}\dfrac{f(x)}{x-3}=+\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\dfrac{f(x)}{x-3}=\lim\limits_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\dfrac{2\sqrt{(x+2)(3-x)}}{x-3}$

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\dfrac{-2(x+2)}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}=-\infty$

$\lim\limits_{\substack{x\to3\\x\prec3}}\dfrac{f(x)}{x-3}=-\infty$

2-أ)

$\begin{cases}f(x)=2\sqrt{(x+2)(3-x)};-2\prec x\prec3\\f(x)=2\sqrt{(x+2)(x-3)};x\succ3\end{cases}$

إذا كان $x\in]-2,3[$

فإن $f'(x)=\dfrac{2[(x+2)(3-x)]}{2\sqrt{(x+2)(3-x)}}$

أي أن $(\forall x\in]-2,3[)\quad f'(x)=\dfrac{1-2x}{\sqrt{(x+2)(3-x)}}$

وبالتالي فإن إشارة $f'(x)$ على $]-2,3[$ هي إشارة $1-2x$ (لأن $\sqrt{(x-2)(3-x)}\succ0$)

إذا كان $x\in]3,+\infty[$

فإن $f'(x)=2\dfrac{\left[(x+2)(x-3)\right]'}{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}$

$(\forall x\in]3,+\infty[)\quad f'(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{(x+2)(x-3)}}$

$x\succ 3\Rightarrow x\succ\dfrac{1}{2}\Rightarrow 2x-1\succ 0$

$\Rightarrow f'(x)\succ 0$

إذن $\forall x\in]3,+\infty[\ f'(x)\succ 0$

ب-

x	-2		$1/2$		3		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	−	‖	+	
f(x)	0	↗	5	↘	0	↗	$+\infty$

3-أ)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{(x+2)(x-3)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2-x-6}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}\right)}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\sqrt{x^2 1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2}}=2$$

لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{x^2}=0$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{(x+2)(x-3)}-2x\right]$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)(x-3)-x^2}{\sqrt{(x+2)(x-3)}+x}$$

$$=2\lim_{x\to+\infty}\frac{6-x}{\sqrt{(x+2)(x-3)}+x}$$

$$= 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{6}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} - \frac{6}{x} + 1}} = -1$$

إذن المستقيم (D) مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ب-) ليكن x عنصرا من $]3, +\infty[$

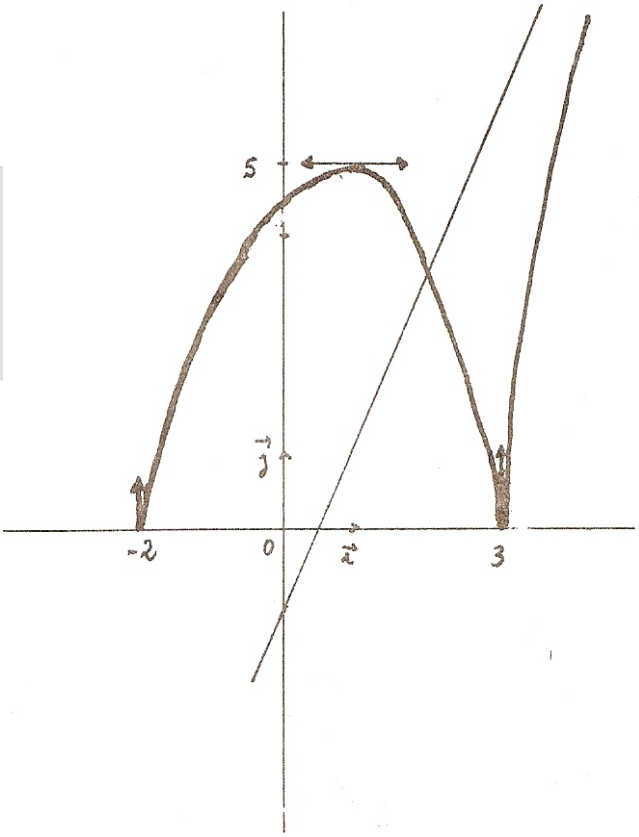
$$f(x) - (2x - 1) = 2\sqrt{(x+2)(x-3)} - (2x-1)$$

$$= \frac{4(x+2)(x-3) - (2x-1)^2}{2\sqrt{(x+2)(x-3)} + (2x-1)}$$

$$= \frac{-25}{2\sqrt{(x+2)(x-3)} + (2x-1)} \prec 0$$

لكل x من $]3, +\infty[$ $f(x) \prec 2x - 1$;

إذن المستقيم (D) يوجد تحت المنحنى (C) على المجال $]3, +\infty[$.



تمرين 9:

-1

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2+2x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x(x+2) \geq 0$$
$$x \in]-\infty,2] \cup [0,+\infty[$$
$$D_f =]-\infty,2] \cup [0,+\infty[$$

بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+2x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2x} = +\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$

فإن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

-2

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x^2+2x}) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+2}-x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1}$$

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{2}{x}}-1\right)=-2$

وبالتالي فإن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

ومنه فإن المنحنى (C) يقبل مقارب بجوار $-\infty$ معادلته $y=-1$

-3

$$\lim_{\substack{x\to-2\\ x<-2}}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{\substack{x\to-2\\ x<-2}}\frac{x+\sqrt{x^2+2x}+2}{x+2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to-2\\ x<-2}}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+2}\right) = \lim_{\substack{x\to-2\\ x<-2}}\left(1+\frac{x^2+2x}{(x+2)\sqrt{x^2+2x}}\right)$$
$$= \lim_{\substack{x\to-2\\ x<-2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2x}}\right) = -\infty$$

إذن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار 2-.

$$\lim_{\substack{x\to0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{\substack{x\to0\\ x>0}}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+2x}}{x}\right)$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \left(1 + \frac{x(x+2)}{x\sqrt{x^2+2x}} \right) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \left(1 + \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x}} \right)$$

إذن $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \succ 0}} \frac{f(x)-f(0)}{x} = +\infty$

وبالتالي فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يمين 0.

4-أ-) ليكن x من $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$

إذن $f'(x) = 1 + \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}} = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}}$

$(\forall x \in D - \{-2,0\})$

$x \succ 0 \Rightarrow x+1 \succ 0 \Rightarrow x+1+\sqrt{x^2+2x} \succ 0$

$\forall x \in]0,+\infty[\quad f'(x) \succ 0$

إذن f تزايدية على المجال $]0,+\infty[$

ليكن x من D .

$$x+1+\sqrt{x^2+2x} = \frac{(x+1)^2-(x^2+2x)}{(x+1)-\sqrt{x^2+2x}}$$

$$= \frac{1}{(x+1)-\sqrt{x^2+2x}}$$

$$x \prec -2 \Rightarrow \begin{cases} x+1 \prec -1 \prec 0 \\ -\sqrt{x^2+2x} \prec 0 \end{cases}$$

إذن $\forall x \in]-\infty,-2[\quad f'(x) \prec 0$

وبالتالي فإن الدالة f تناقصية على $]-\infty,-2[$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
f'(x)	-	||	+	
f(x)	-1 ↘	||	↗ $+\infty$	
	-2	||	0	

5-أ-)

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (2x+1)] = \lim_{x \to +\infty} \left[x + \sqrt{x^2+2x} - 2x - 1 \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2+2x} - (x+1) \right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+2x-(x+1)^2}{\sqrt{x^2+2x}+(x+1)}$$

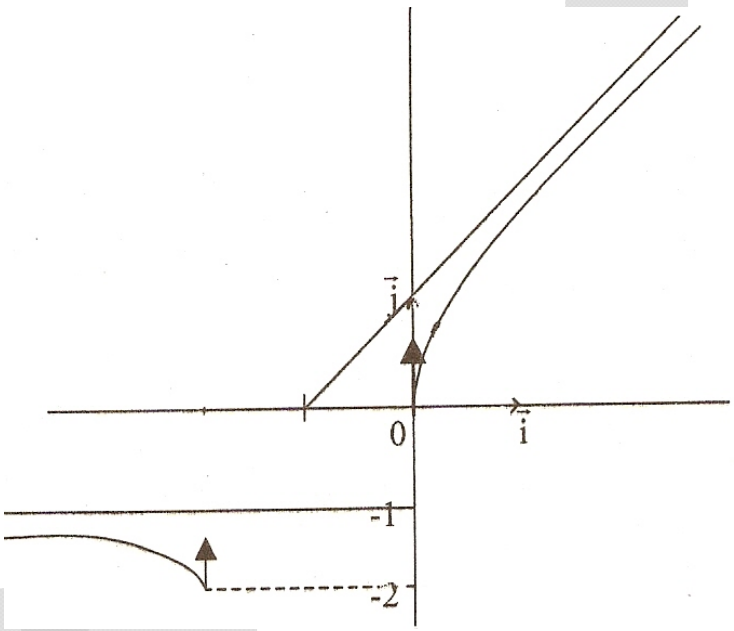
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1}$$

بما أن $\lim_{x \to +\infty}(x+1) = +\infty$ و $\lim_{x \to +\infty}\sqrt{x^2+2x} = +\infty$

وبالتالي فإن $\lim \frac{-1}{\sqrt{x^2+2x}+x+1} = 0$

يعني أن $\lim_{x \to +\infty}\left[f(x)-(2x+1)\right] = 0$

وبالتالي فإن المستقيم الذي معادلته $y = 2x+1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $+\infty$



6-أ-) g دالة متصلة وتزايدية قطعا على $[0,+\infty[$ و $g([0,+\infty[) = [0,+\infty[$

إذن g تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$.

ليكن y من $\mathbb{R}^+$.

نقوم بحل المعادلة $y = g(x)$ $x \geq 0$

$$\begin{pmatrix} y = g(x) \\ x \geq 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + \sqrt{x^2+2x} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[y - x = \sqrt{x^2+2}, x \geq 0 \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[(y-x)^2 = x^2+2x, x \geq 0 \right]$$

$$\left[\Leftrightarrow (y^2 - 2xy + x^2 = x^2+2x, x \geq 0) \right.$$

$$\Leftrightarrow \left[(2y+2)x - y^2 = 0, x \geq 0 \right]$$

بما أن $y \geq 0$ فإن $2y+2 \neq 0$

وبالتالي فإن $x = \frac{y^2}{2y+2}$

$g^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$x \mapsto \frac{x^2}{2x+2}$

تمرين 10:

a-1 – تحديد D .

بما أن : $D=\{x\in IR\,/\,2x\neq 0 \text{ و } 27+x^2\geq 0\}$

وبما أن : $27+x^2\geq 0$ لكل x من IR

فإن : $D=\{x\in IR\,/\,2x\neq 0\}$

$=\{x\in IR\,/\,x\neq 0\}$

إذن : $D=IR^*$

$=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

b- حساب نهايات f عند محدات D

$\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sqrt{27+x^2}=+\infty$

و $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x}=\lim\limits_{|x|\to+\infty}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

إذن : $\lim\limits_{|x|\to+\infty}f(x)=+\infty$

- لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{27+x^2}=\sqrt{27}$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+1}{2x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x+1}{2x}=-\infty$

إذن $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$

a-2 التحقق من صحة المتساوية

ليكن x عنصرا من IR^*

$$f(x)-\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x+1}{2x}\sqrt{27+x^2}-\frac{x+1}{2}$$

$$=\frac{x+1}{2x}(\sqrt{27+x^2}-x)=\frac{x+1}{2x}\frac{(\sqrt{27+x^2}-x)(\sqrt{27+x^2}+x)}{\sqrt{27+x^2}+x}$$

$$=\frac{x+1}{2x}\cdot\frac{27+x^2-x^2}{\sqrt{27+x^2}+x}$$

إذن : $f(x)-\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=\dfrac{x+1}{2x}\left(\dfrac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)$ لكل x من IR^*

b- الاستنتاج

بما أن : $f(x)-\left(\dfrac{x+1}{2}\right)=\dfrac{x+1}{2x}\left(\dfrac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)$ لكل x من IR^*

وبما أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x}=\dfrac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}=0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{2x}\left(\dfrac{27}{\sqrt{x^2+27}+x}\right)=0$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\left(\dfrac{x+1}{2x}\right)=0$

وبالتالي فإن المستقيم (Δ_1) ذا المعادلة $y=\dfrac{x+1}{2}$

هو بالفعل مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

c- لنبين أن (Δ_2) مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

ليكن x عنصرا من IR^*

$$f(x)-\left(-\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x+1}{2x}\sqrt{27+x^2}+\frac{x+1}{2}$$

$$=\frac{x+1}{2x}(\sqrt{27+x^2}+x)=\frac{(x+1)(27+x^2-x^2)}{2x(\sqrt{27+x^2}-x)}$$

$$=\frac{x+1}{2x}.\frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x}$$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x}=\frac{1}{2}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x}=0$

فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+1}{2x}\frac{27}{\sqrt{27+x^2}-x}=0$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)-\left(-\frac{x+1}{2}\right)=0$

وبالتالي فإن المستقيم (Δ_2) ذا المعادلة $y=-\frac{x+1}{2}$ هو بالفعل مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

3- a- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^* ولدينا لكل x من IR^*

$$f'(x)=\frac{\begin{vmatrix}1&1\\2&0\end{vmatrix}}{4x^2}\sqrt{27+x^2}+\frac{x+1}{2x}.\frac{2x}{2\sqrt{27+x^2}}$$

$$=\frac{-\sqrt{27+x^2}}{2x^2}+\frac{x+1}{2\sqrt{27+x^2}}=\frac{x^2(x+1)-(27+x^2)}{2x^2\sqrt{x^2+27}}$$

$$=\frac{x^3+x^2-27-x^2}{2x^2-\sqrt{x^2+27}}=\frac{x^3-27}{2x^2\sqrt{x^2+27}}$$

b- تغيرات f

إشارة $f'(x)$ هي إشارة x^3-27

ولدينا لكل x من IR^* : $f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-27=0$

$$\Leftrightarrow x^3=27$$

$$\Leftrightarrow x=3$$

و $f'(x)\succ 0\Leftrightarrow x^3-27\succ 0$

$$x^3\succ 27$$

$$x\succ 3$$

و $f'(x)\prec 0\Leftrightarrow x\prec 3$

إذن الدالة f تزايدية على المجال $[3,+\infty[$ وتناقصية على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,3]$

c- جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		3	$+\infty$
f ' (x)	−		‖	−	0	+
f(x)	$+\infty$	↘	‖	↘	4	↗ $+\infty$
		$-\infty$	‖			

a-4- تقاطع (C) مع محور الأفاصيل

ليكن x عددا حقيقيا

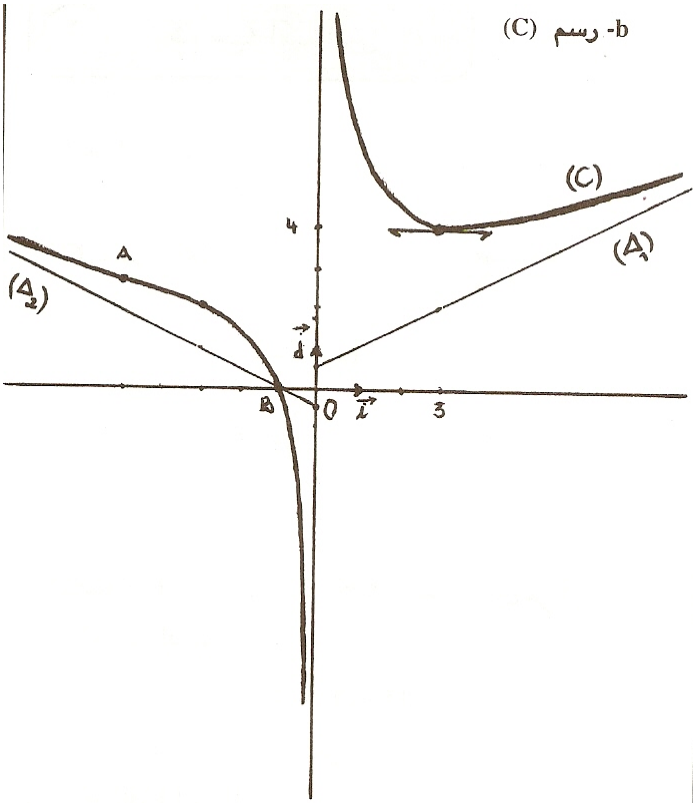
بما أن : $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{(x+1)\sqrt{27+x^2}}{2x}=0$

$\Leftrightarrow x+1=0$

$\Leftrightarrow x=-1$

فإن محور الأفاصيل يقطع (C) في النقطة $B(-1,0)$

b- رسم (C)



تمرين 11:

1- * تحديد D

ليكن x عددا حقيقيا

لدينا $1+x^2 \geq 0$ و $x^3 \neq 0$ $\Leftrightarrow x \in D$

$1+x^2 \geq 0$ و $x \neq 0$

وبما أن : $1+x^2 \geq 0$ لكل x من IR

$$D = IR^*$$
$$=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

- **التحقق من أن f فردية**

ليكن x عنصرا من IR^*

لدينا : $(-x) \in IR^*$ و $f(-x) = \frac{2(-x^2)-1}{(-x)^3}.\sqrt{1+(-x)^2}$

$$= \frac{2x^2-1}{-x^3}\sqrt{1+x^2} = -f(x)$$

إذن الدالة f هي بالفعل فردية.

2- **حساب النهايتين والتأويل الهندسي**

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^3}.\sqrt{1+x^2}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^3}.\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^3}.|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^3}.x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^2}.\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

وبما أن : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2-1}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$

و $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{1+0} = 1$

فإن : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2.1 = 2$

وهذا يعني هندسيا أن المستقيم ذا المعادلة $y = 2$ هو مقارب أفقي للمنحنى (ζ) بجوار $+\infty$

ولدينا : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{2x^2-1}{x^3} = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to 0^+} \sqrt{1+x^2} = 1$

إذن : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

وهذا يعني هندسيا أن المستقيم ذا المعادلة $x = 0$ أي محور الأراتيب هو مقارب رأسي للمنحنى (ζ).

3- **تغيرات f**

الدالة f قابلة للاشتقاق على D ولدينا لكل x من D :

$$f'(x) = \left(\frac{2x^2-1}{x^3}\right)'\sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2-1}{x^3}(\sqrt{1+x^2})'$$

$$= \frac{4x.x^3 - 3x^2(2x^2-1)}{x^6}\sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2-1}{x^3}.\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{4x^2 - 6x^2 + 3}{x^4}\sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2-1}{x^2}.\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{3-2x^2}{x^4}\sqrt{1+x^2} + \frac{2x^2-1}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \frac{(3-2x^2)(1+x^2)+x^2(2x^2-1)}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{3+3x^2-2x^2-2x^4+2x^4-x^2}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \frac{3}{x^4\sqrt{1+x^2}}$$

إذن $f'(x) \succ 0$ لكل x من IR^*

وهذا يعني أن f تزايدية قطعا على كل من المجالين $]-\infty,0[$ و $]0,+\infty[$

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		+	‖	+	
f(x)	-2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

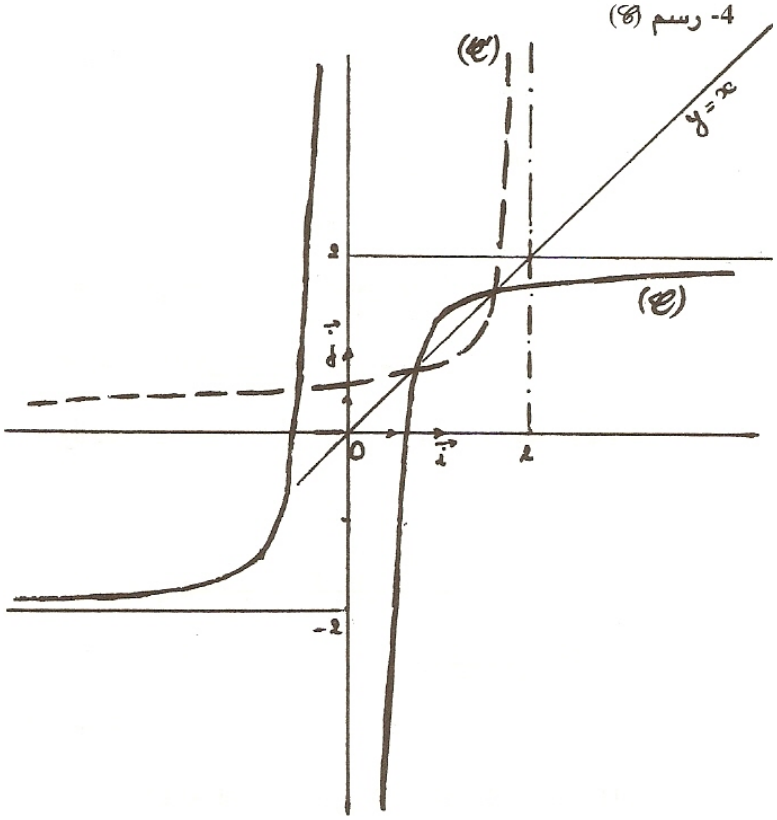
لاحظ أن :

لدينا : $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -2$

لأن : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 2$

و f فردية.

4- رسم (𝒞)



4- أ- لنبين أن g تقابل من IR^{+*} نحو مجال J

بما أن الدالة g متصلة وتزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

فإنها تقابل من $]0,+\infty[$ نحو المجال : $J = g(]0,+\infty[) =]-\infty,2[$

إذن فهي تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $]-\infty,2[$ نحو $]0,+\infty[$

ب- لنبين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال J.

لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا لكل x من $]0,+\infty[$

$g'(x) \neq 0$

إذن الدالة g^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال J .

ج- رسم (ζ')

مماثل منحنى f على $]0,+\infty[$ هو المنحنى (ζ') بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = x$ (أنظر الشكل)

تمرين 12:

1-* حساب $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{6x^{\frac{2}{3}}}{x}-4$$

$$=\frac{6x^{\frac{2}{3}-1}}{x}-4=6x^{\frac{-1}{3}}-4=\frac{6}{\sqrt[3]{x}}-4$$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to 0^+}=\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}=+\infty$

فإن : $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$

ملحوظة : الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

- **التأويل الهندسي**

المنحنى (ζ) يقبل في النقطة O(0,0) نصف مماس رأسي موجه نحو الأعلى.

2- **تحديد الفرع اللانهائي**

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{\sqrt[3]{x}}-4$

$= 0-4 = -4$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)+4x=\lim\limits_{x\to+\infty}6x^{\frac{2}{3}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}6\sqrt[3]{x^2}=+\infty$

فإن المنحنى (ζ) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=-4x$

3- **جدول تغيرات f**

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^{+*} ولدينا لكل x من IR^{+*}

$$f'(x)=6.\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}-4$$

$$=4\left(x^{\frac{-1}{3}}-1\right)=4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1\right)$$

$$=4\frac{\left(1-\sqrt[3]{x}\right)}{\sqrt[3]{x}}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1-\sqrt[3]{x}$

ومنه جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		$+\infty$
f '(x)	‖	+	0	−	
f(x)	0	↗	2	↘	$-\infty$

ملاحظة : لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(6x^{\frac{2}{3}} - 4\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(6x^{\frac{2}{3}-1} - 4\right) = \lim_{x\to+\infty} x\left(6x^{\frac{-1}{3}} - 4\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{6}{\sqrt[3]{x}} - 4\right) = -\infty$$

(لأن $\lim\limits_{x\to+\infty} x\frac{6}{\sqrt[3]{x}} - 4 = 0 - 4 = -4$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$)

4-أ- تحديد نقطتي تقاطع (ζ) مع محور الأفاصيل.

ليكن x عنصرا من IR^+

لدينا : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^{\frac{2}{3}} - 4x = 0$

$$\Leftrightarrow 2x^{\frac{2}{3}}\left(3 - \frac{2x}{x^{\frac{2}{3}}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^{\frac{2}{3}}\left(3 - 2x^{1-\frac{2}{3}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^{\frac{2}{3}}\left(3 - 2x^{\frac{1}{3}}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = \frac{27}{8}$$

إذن محور الأفاصيل يقطع (ζ) في النقطتين $O(0,0)$ و $A(\frac{27}{8},0)$

ب- معادلة (Δ)

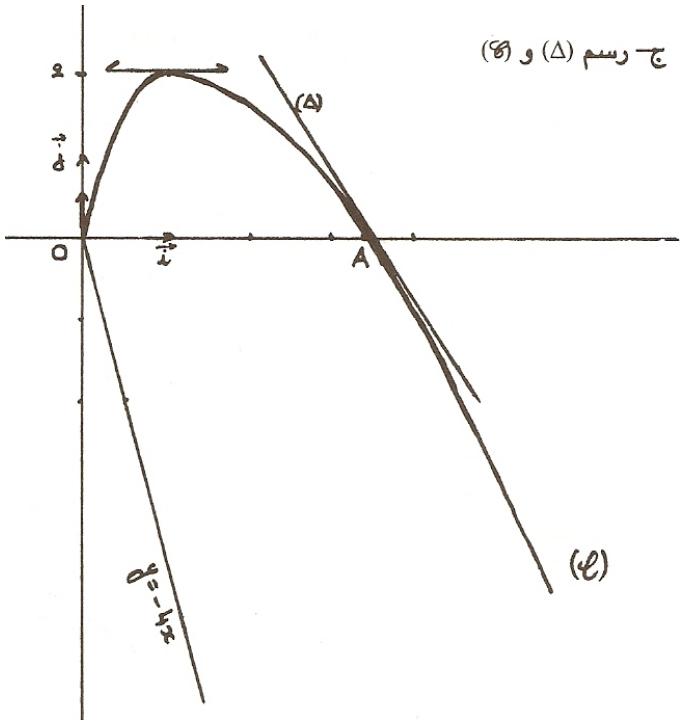
معادلة (Δ) مماس (ζ) في النقطة ذات الأفصول $\frac{27}{8}$ هي:

$$y = f\left(\frac{27}{8}\right) \times \left(x - \frac{27}{8}\right) + f\left(\frac{27}{8}\right)$$

يعني أن : $y = -\frac{4}{3}\left(x - \frac{27}{8}\right) + 0$

أي أن : $y = -\frac{4}{3}x + \frac{9}{2}$

ج- رسم (Δ) و (C)



5-* **لنبين أن g تقابل**

الدالة g متصلة وتناقصية قطعا على المجال $I=[1,+\infty[$

وبالتالي فإنها تقابل من I نحو المجال $g(I)=]-\infty,2]$

أي أنها تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $]-\infty,2]$ نحو $[1,+\infty[$

- حساب $(g^{-1})'(0)$

بما أن : $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{g(g^{-1}(0))}$

وبما أن : $g(\frac{27}{8})=0$ فإن $(g^{-1})(0)=\frac{27}{8}$

فإن : $(g^{-1})'(0)=\dfrac{1}{g'\left(\frac{27}{8}\right)}$

$=\dfrac{1}{-\frac{4}{3}}=-\dfrac{3}{4}$

تمرين 13:

1-أ- **حساب** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} = +\infty$

فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{1+x^2} - x = +\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

ب- لنبين أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{1+x^2} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}+x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} = 0$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0^2 = 0$

2- أ- لنبين أن : $f'(x) = \dfrac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR ولدينا لكل x من IR :

$$f'(x) = 2(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}-x)'$$

$$= 2(\sqrt{1+x^2}-x)\left(\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-1\right)$$

$$= 2(\sqrt{1+x^2}-x)\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-1\right) = 2(\sqrt{1+x^2}-x)\left(\frac{x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$= \frac{-2(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}-x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{-2(\sqrt{1+x^2}-x)^2}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \frac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

ب-* لنبين أن $f'(x) \neq 0$ لكل x من IR

لذلك سنبين أن المعادلة $f'(x) = 0$ لا تقبل أي حل في IR.

لدينا : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}} = 0$

$$\Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1+x^2}-x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2}-x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+x^2} = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+x^2 = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

وهذا غير ممكن

إذن المعادلة $f'(x) = 0$ لا تقبل أي حل في IR

وهذا يعني أن $f'(x) \neq 0$ لكل x من IR.

طريقة ثانية:

ليكن x عنصرا حقيقيا

بما أن : $x^2+1 \succ x^2$

فإن : $\sqrt{x^2+1} \succ \sqrt{x^2}$

يعني أن : $\sqrt{x^2+1} \succ |x|$

وبما أن : $|x| \geq x$

فإن : $\sqrt{x^2+1} \succ x$

يعني أن : $\sqrt{x^2+1}-x \succ 0$

إذن : $f(x) \succ 0$

ومنه $f(x) \neq 0$

وبالتالي: $f'(x) \neq 0$ لكل x من IR.

- **جدول تغيرات الدالة f**

بما أن : $f'(x)=\dfrac{-2f(x)}{\sqrt{1+x^2}}$ لكل x من IR.

فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-f(x)$

وبما أن $f(x) \succ 0$ لكل x من IR.

فإن $f'(x) \prec 0$ لكل x من IR.

ومنه جدول تغيرات الدالة f .

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

3-* لنبين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$

لكل x من IR^* ، $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-x)^2}{x}$

$$=\frac{1+x^2-2x\sqrt{1+x^2}+x^2}{x}=\frac{1+2x^2-2x\sqrt{1+x^2}}{x}$$

$$=\frac{1}{x}+2x-2\sqrt{1+x^2}$$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}2x-2\sqrt{1+x^2}=-\infty$

فإن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-\infty$

- **التأويل الهندسي**

المنحنى (ζ) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه محور الأراتيب.

4-أ- معادلة للماس (T)

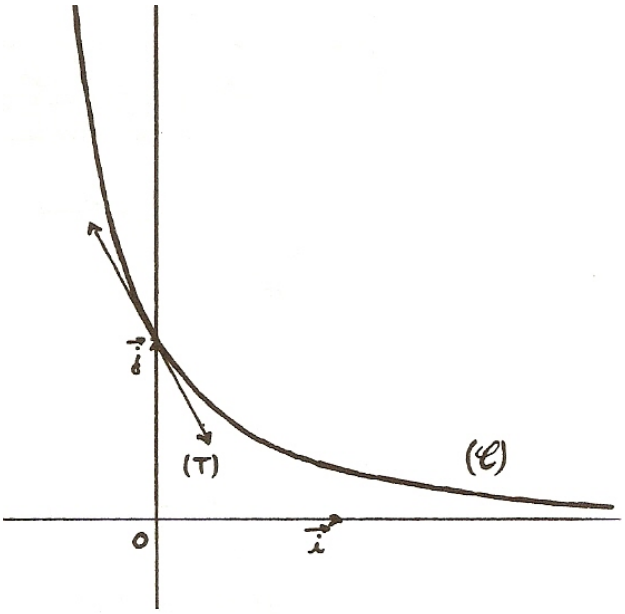
معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس (ζ) في النقطة ذات الأفصول 0 هي:

$$y = f'(0)(x-0)+f(0)$$

أي : $y = -2(x-0)+1$

أي : $y = -2x+1$

ب- رسم (T) و (ζ)



5-أ- لنبين أن f تقابل من IR نحو مجال J .

الدالة f متصلة وتناقصية قطعا على IR

إذن فهي تقابل من IR نحو المجال $J = f(IR) =]0,+\infty[$

وبالتالي فهي تقبل دالة عكسية f' معرفة على من $]0,+\infty[$ نحو IR

ب- حساب $(f^{-1})'(1)$

بما أن : $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))}$

وبما أن : $(f)(0) = 1$ فإن $f^{-1}(1) = 0$

فإن : $(f^{-1})(1) = \dfrac{1}{f'(0)}$

$= \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$

ج- حساب $f'(x)$

ليكن x عنصرا من $]0,+\infty[$ و y عنصرا من IR

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{1+y^2}-y)^2 = x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+y^2}-y = \sqrt{x} \text{ أو } \Leftrightarrow \sqrt{1+y^2}-y = -\sqrt{x}$$

لدينا : $\sqrt{1+y^2}-y \succ 0$ (لأن $\sqrt{1+y^2} \succ y$)

أي : $\sqrt{1+y^2}-y = \sqrt{x}$

أي : $\sqrt{1+y^2} = \sqrt{x}+y$ أي : $(\sqrt{1+y^2})^2 = (\sqrt{x}+y)^2$

أي : $1+y^2 = 2y\sqrt{x}+y^2$

أي : $2y\sqrt{x} = 1-x$ أي : $y = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}}$

إذن : $f^{-1}(x) = \dfrac{1-x}{2\sqrt{x}}$ لكل x من IR

تمرين 14:

1-أ- حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

بما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2+1} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2) = +\infty$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب- دراسة الفرع اللانهائي

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x}$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}+\frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}+\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^3}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{2}{x}+\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}} = 1-0+0 = 1$$

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} -2+\sqrt[3]{x^2+1}$

$= +\infty$

إذن (ζ) يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y=x$

2-أ- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^+

لدينا لكل x من IR^+

$$f'(x) = \left[x-2+(x^2+1)^{\frac{1}{3}}\right]'$$

$$= 1+\frac{1}{3}2x(x^2+1)^{\frac{1}{3}-1} = 1+\frac{2x}{3}(x^2+1)^{-\frac{2}{3}}$$

إذن : $= \dfrac{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}+2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$

ب- جدول تغيرات f

بما أن $f'(x) \succ 0$ لكل x من IR^+

فإن جدول تغيرات الدالة f يكون كالتالي :

x	0		$+\infty$
f ' (x)	1	+	
f(x)	−1	↗	$+\infty$

1- لنبين أن f تقابل من IR^+ نحو مجال I.

بما أن f دالة متصلة وتزايدية قطعا على IR^+ ،

فإنها تقابل من IR^+ نحو المجال : $I = f(IR^+) = [-1,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من $[-1,+\infty[$ نحو IR^+

4-أ- لنبين أن المعادلة f(x) =0 تقبل حلا وحيدا.

بما أن : $f(1) = -1 + \sqrt[3]{2} \succ 0$ و $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2} + \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \prec 0$

إذن : $f(1).f(\frac{1}{2}) \prec 0$

وبما أن f متصلة وتزايدية قطعا على $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

فإن المعادلة f(x)=0 تقبل بالفعل حلا وحيدا α بحيث $\frac{1}{2} \prec \alpha \prec 1$

ب- تحديد نقطة تقاطع (ζ) و (Δ)

ليكن x عنصرا من IR^+

لدينا : $f(x) = x \Leftrightarrow -2 + \sqrt[3]{x^2+1} = 0$

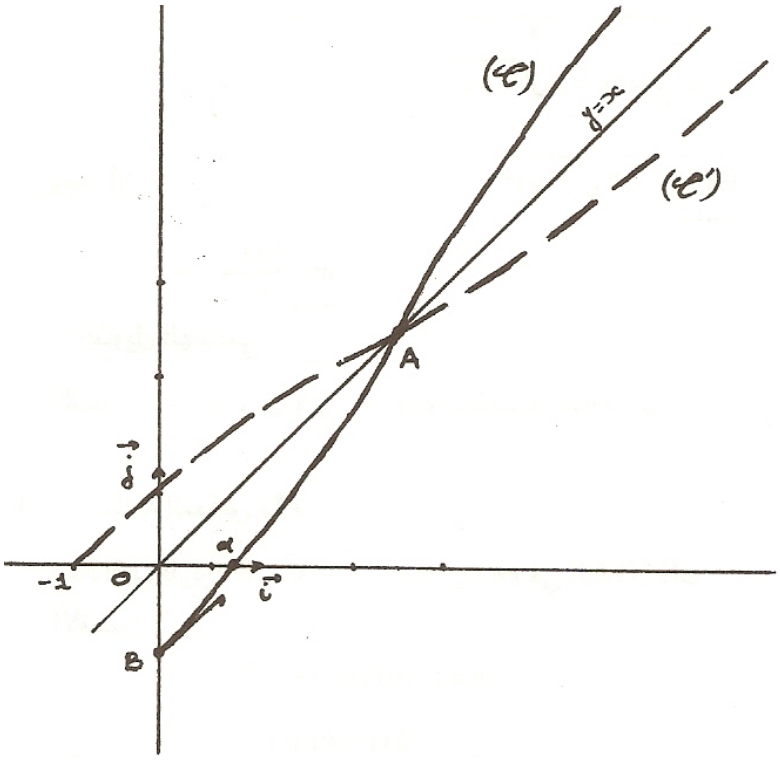
$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2+1} = 2$

$\Leftrightarrow x^2 = 7$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{7}$ (لأن $x \geq 0$)

إذن نقطة تقاطع (ζ) والمستقيم (Δ) الذي معادلته y =x هي : $A\left(\sqrt{7}, \sqrt{7}\right)$

ج- رسم (ζ) و (ζ')



ملحوظة : معادلة ديكارتية لحامل نصف مماس (ζ) عند النقطة $B(0,-1)$ هي $y = x - 1$

تمرين 15:

1- لنبين أن f متصلة في 1.

بما أن : $f(1)=\dfrac{1+1}{2\sqrt{1}}$

$=\dfrac{2}{2}=1$

و بما أن : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}$

$=\dfrac{1+1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{2}{2}=1=f(1)$

فإن الدالة f متصلة على اليمين في I .

ولدينا : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x+\dfrac{2}{x}\right)$

$=-1+\dfrac{2}{1}=-1+2=1=f(1)$

إذن الدالة f متصلة على اليسار في 1

وبالتالي فإن الدالة f متصلة بالفعل في النقطة $x_0=1$ لأنها متصلة على اليمين وعلى اليسار في هذه النقطة

2-أ- لنبين أن f قابلة للاشتقاق على اليسار في 1

لدينا : $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x+\dfrac{2}{x}-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x^2+2-x}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)(-x-2)}{x(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-x-2}{x}=\dfrac{-1-2}{1}=-3$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق بالفعل على اليسار في 1

و : $f_g'(1)=-3$

ب- لنبين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1

لدينا: $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\dfrac{1+x}{2\sqrt{x}}-1}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1+x-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=\dfrac{1-1}{2(1+1)}=\dfrac{0}{4}=0$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق بالفعل على اليمين في 1

و : $f_d'(1)=0$

3-أ- لنبين أن $f'(x)\prec 0$ لكل x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0[\cup]0,1[$ ولدينا x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$

$f'(x)=\left(-x+\dfrac{2}{x}\right)$

$=-1-\dfrac{2}{x^2}-\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)$

وبما أن : $1+\frac{2}{x^2} \succ 0$ لكل x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$

فإن : $f'(x) \prec 0$ لكل x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$

أ- **لنبين أن :** $f'(x)=\frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$ **لكل x من** $]1,+\infty[$

f دالة قابلة للاشتقاق على $]1,+\infty[$ ولدينا لكل x من $]1,+\infty[$

$$f'(x)=\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{x}-\frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x)}{x}\right]=\frac{1}{2}.\frac{2x-1-x}{2x\sqrt{x}}$$

$$=\frac{x-1}{4x\sqrt{x}}$$

إذن $f'(x) \succ 0$ لكل x من $]1,+\infty[$

ج- **جدول تغيرات الدالة f :**

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f ' (x)		−	‖	−	(- 3) (0)	+	
f(x)	$+\infty$	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

لدينا :

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=-\infty$

* $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(-x+\frac{2}{x}\right)=+\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+x}{2\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{2}=+\infty$

4-أ- دراسة الفروع اللانهائية:

*بما أن : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$

فإن المنحنى (ζ) يقبل مقاربا رأسيا معادلته x =0 أي محور الأراتيب.

* لكل x من $]-\infty,0[\cup]0,1[$ ، $f(x)=-x+\frac{2}{x}$

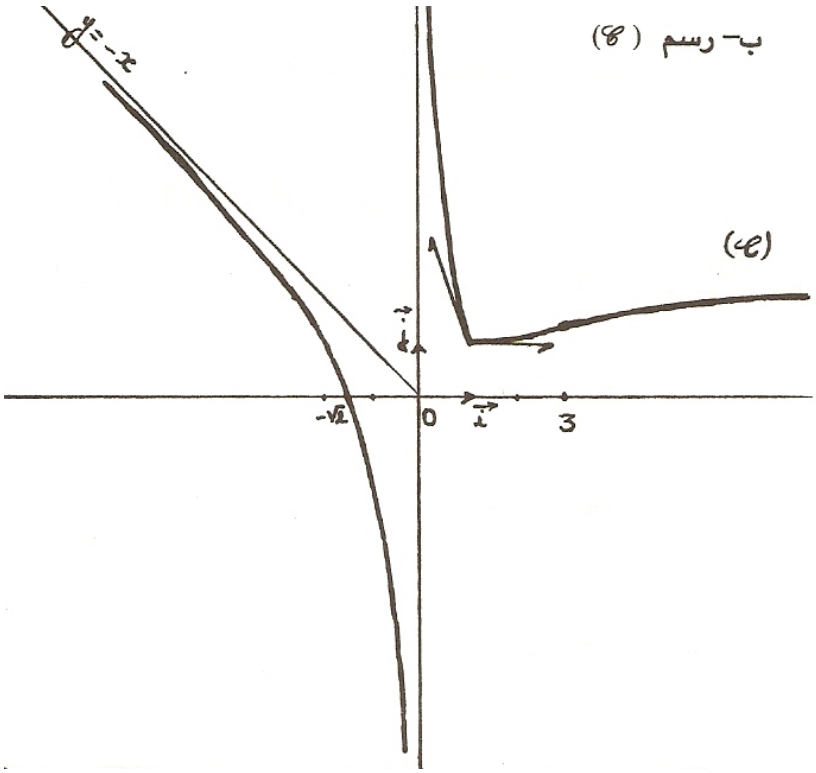
لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0$

إذن (ζ) مقاربا معادلته y = -x يقبل بجوار $-\infty$

* لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x}{2x\sqrt{x}}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x\sqrt{x}}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=0+0=0$$

إذن (ζ) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$.



ملحوظة : معادلتا حاملي نصفي مماس (ζ) عند النقطة ذات الأفصول 1 هما : $y=1$ و $y=-3x+4$

تمرين 16:

1-* حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-1}{x^3+1}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1$

* لنبين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

لكل x من $]-\infty,1[$. $f(x)=x-1+2\sqrt{1-x}$

$=\sqrt{1-x}(2-\sqrt{1-x})$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} 2-\sqrt{1-x}=-\infty$

إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2-* دراسة قابلية اشتقاق f على اليمين في 1

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\dfrac{x^3-1}{x^3+1}-0}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x^3-1}{(x-1)(x^3+1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^3+1)})$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x+1}{x^3+1}=\frac{3}{2}$$

وبالتالي فإن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 ولدينا : $f'_d(1)=\dfrac{3}{2}$

*** دراسة قابلية اشتقاق f على اليسار في 1**

بما أن : $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x-1}$

$$=\lim_{x\to1^-}\frac{x-1}{x-1}+\frac{2\sqrt{1-x}}{-(1-x)}$$

$$=\lim_{x\to1^-}1-\frac{2\sqrt{1-x}\sqrt{1-x}}{(1-x)\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to1^-}1-\frac{2(1-x)}{(1-x)\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to1^-}1-\frac{2}{\sqrt{1-x}}=-\infty$$

فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في 1.

*** التأويل الهندسي :**

(ζ) يقبل في النقطة $A(1,0)$ نصفي مماس أحدهما رأسي موجه نحو الأعلى والآخر على اليمين معادلة حامله هي

$$y=\frac{3}{2}(x-1)$$

1-3- لنبين أن f تزايدية قطعا على $[1,+\infty[$

f دالة قابلة للاشتقاق على $[1,+\infty[$

لكل x من $]1,+\infty[$.

$$f'(x)=\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)'$$

$$= \frac{3x^2(x^3+1)-3x^2(x^3-1)}{(x^3+1)^2} = \frac{3x^2(x^3+1-x^3+1)}{(x^3+1)^2}$$

$$= \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}$$

وبالتالي فإن $f'(x) \succ 0$ لكل x من $]1,+\infty[$

إذن f هي بالفعل دالة تزايدية قطعا على المجال $]1,+\infty[$

ب- لنبين أن $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})}$ **لكل x من** $]-\infty,1[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty,1[$

ولدينا لكل x من $]-\infty,1[$

$$f'(x) = (x-1+2\sqrt{1-x})'$$

$$= 1+2.\frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 1-\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}} = \frac{(\sqrt{1-x}-1)(\sqrt{1-x}+1)}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$$

$$= \frac{1-x-1}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)} = \frac{-x}{\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x}+1)}$$

ج- جدول تغيرات f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f ' (x)		+	0	-	$(-\infty)$ $\left(\frac{3}{2}\right)$	+	
f(x)	$-\infty$	↗	1	↘	0	↗	1

4- أ- دراسة الفرعين اللانهائيين

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

إذن (C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته y = 1 بجوار $+\infty$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1+2\sqrt{1-x}}{x}$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x}+\frac{2\sqrt{1-x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x}+\frac{2(1-x)}{x\sqrt{1-x}}$$

فإن : $= \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\frac{1}{x}+(\frac{2}{x}-2).\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

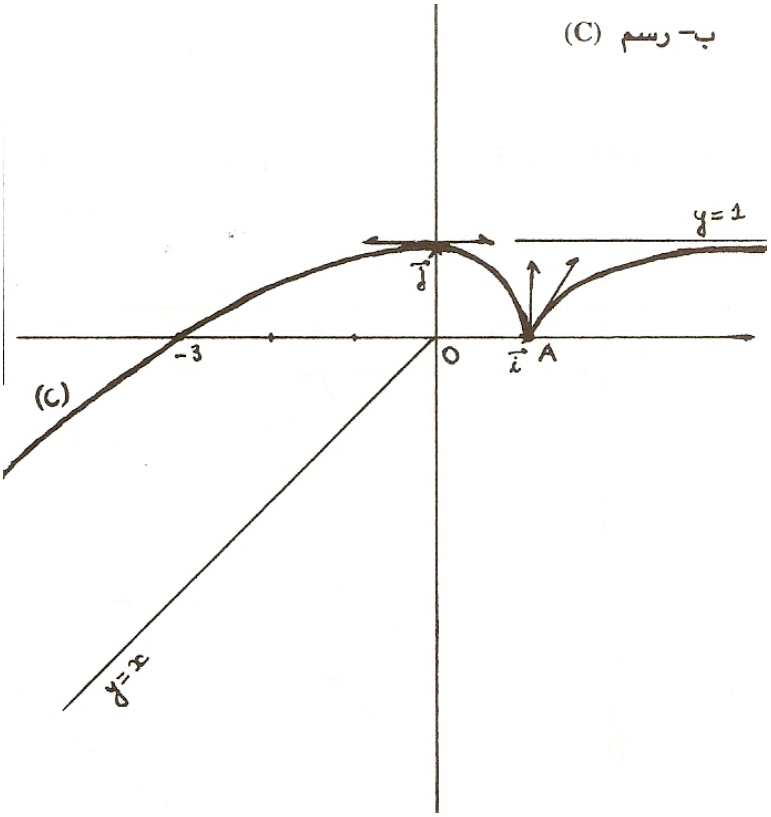
وبما أن :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-x = \lim_{x\to-\infty} x-1+2\sqrt{1-x}-x$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2\sqrt{1-x}-1 = +\infty$$

فإن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة y= x

ب- رسم (C)



5- أ- لنبين أن g تقابل من $[1,+\infty[$ نحو مجال I

بما أن الدالة g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

فإن فهي تقابل من $[1,+\infty[$ نحو المجال :

$$J = f([1,+\infty[) = [0,1[$$

إذن فهي تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $[0,1[$ نحو $[1,+\infty[$

ب- حساب $g^{-1}(x)$

ليكن x عنصرا من $[0,1[$ و y عنصرا من $[1,+\infty[$

لدينا : $g^{-1}(x)=y \Leftrightarrow g(y)=x$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3-1}{y^3+1}=x$$

$$\Leftrightarrow y^3-1=x(y^3+1)$$

$$\Leftrightarrow y^3-1=xy^3+x$$

$$\Leftrightarrow y^3-xy^3=x+1$$

$$\Leftrightarrow y^3(1-x)=x+1$$

$$\Leftrightarrow y^3 = \frac{x+1}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{\frac{x+1}{1-x}}$$

إذن $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$ لكل x من $[0,1[$

ج- لنبين أن g^{-1} دالة أصلية للدالة : $x \to \frac{2}{\sqrt[3]{(x^3 - x^2 - x + 1)^2}}$

ليكن x عنصرا من المجال $[0,1[$

لدينا :

$$\left[g^{-1}(x)\right]' = \left(\sqrt[3]{\frac{x+1}{1-x}}\right)'$$

$$= \left[\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{1}{3}}\right]'$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{-x+1}\right)'\left(\frac{x+1}{-x+1}\right)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}}{(1-x)^2}\cdot\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}\cdot\frac{1}{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\left[(1-x)^3\right]^{\frac{2}{3}}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{-\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{(1-x)^3(x+1)}{1-x}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\left[(1-x)^2(x+1)\right]^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\left[(1-2x+x^2)(x+1)\right]^{\frac{2}{3}}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x+1-2x^2-2x+x^3+x^2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(x^3-x^2-x+1)^{\frac{2}{3}}} = \cdot\frac{2}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}}$$

إذن g^{-1} هي بالفعل دالة أصلية للدالة $x \to \frac{2}{3\sqrt[3]{(x^3-x^2-x+1)^2}}$ على المجال $[0,1[$

تمرين 17:

1-أ- حساب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to0^+} f(x)$

بما أن : $\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)$

$= +\infty$

و $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

فإن : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

وبما أن : $\lim_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ و $\lim_{x\to0^+} x-\sqrt{x} = 0$

فإن : $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

ب- تحديد الفرعين اللانهائيين

* بما أن : $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$

فإن (C) يقبل مقاربا رأسيا معادلته $x = 0$ أي محور الأراتيب.

- بما أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{1}{x\sqrt{x}}$

$= \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x\sqrt{x}} = 1-0+0 = 1$

و : $\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

فإن (C) يقبل بجوار $+\infty$ فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم ذو المعادلة $y = x$

2-أ- حساب $f'(x)$

الدالة f قابلة للاشتقاق على IR^{+*} ولدينا لكل x من IR^{+*} :

$$f'(x) = 1-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= 1-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2x\sqrt{x}-x-1}{2x\sqrt{x}}$$

ولدينا : $(2x+\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) = 2x\sqrt{x}-2x+x-\sqrt{x}+\sqrt{x}-1$

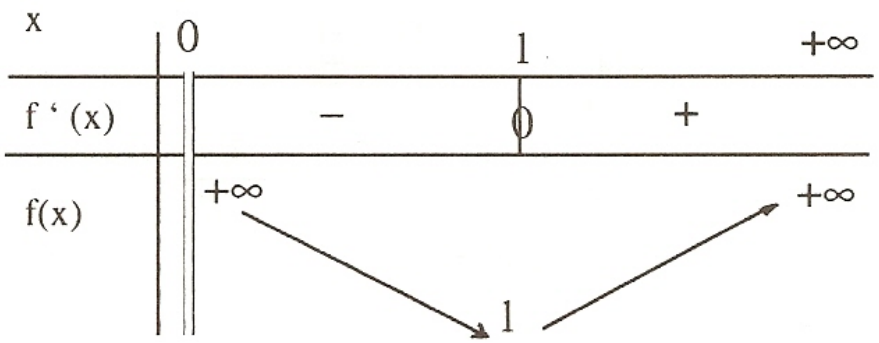
$= 2x\sqrt{x}-x-1$

إذن : $f'(x) = \left(\frac{2x+\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x}-1)$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب- جدول تغيرات f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x}-1$

ومنه جدول تغيرات الدالة f:



3-أ- دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C) و (Δ)

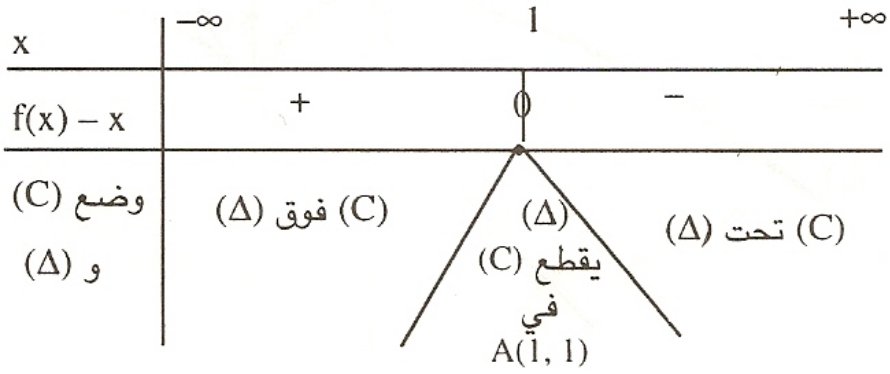
ليكن x عنصرا من IR^{+*}

لدينا : $f(x)-x=\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$

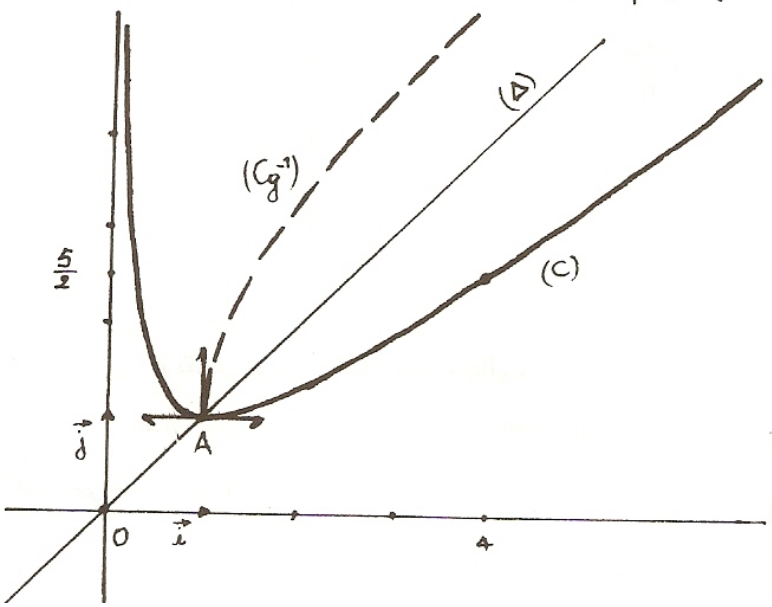
$=\frac{1-x}{\sqrt{x}}$

إشارة $f(x)-x$ هي إشارة $1-x$

ومنه نستنتج الجدول التالي الذي يعطي إشارة $f(x)-x$ والوضع النسبي للمنحنى (C) والمستقيم (Δ)



ب- رسم (C)



4-أ- لنبين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1}

بما أن الدالة g متصلة وتزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

فإنها تقابل من $[1,+\infty[$ نحو المجال $[1,+\infty[$

$f([1,+\infty[)=[1,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من $[1,+\infty[$ نحو $[1,+\infty[$

ومنه فإن : $D_{g^{-1}}=[1,+\infty[$

ب- رسم $(C_{g^{-1}})$

المنحنى $(C_{g^{-1}})$ هو مماثل منحنى f على $[1,+\infty[$ بالنسبة للمستقيم (Δ) ذي المعادلة : y = x (أنظر الشكل)

5-أ- لنبين بالترجع أن $a_n \succ 1$ لكل n من IN

* لدينا: $a_0=2$ ، إذن $a_0 \succ 1$

وهذا يعني أن الخاصية صحيحة من أجل n =0

- ليكن n عنصرا من IN

لنفترض أن $a_n \succ 1$ ولنبين أن $a_{n+1} \succ 1$

بما أن : $a_n \succ 1$

وf تزايدية قطعا على المجال $[1,+\infty[$

فإن : $f(a_n) \succ f(1)$

أي أن $a_{n+1} \succ 1$

إذن: $(\forall n \in IN)\ a_n \succ 1$

ب- لنبين أن (a_n) تناقصية

لذلك سنبين بالترجع أن : $a_{n+1} \prec a_n$ لكل n من IN

- بما أن : $a_0=2$

و $a_1=f(a_0)=f(2)=\dfrac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

فإن : $a_1 \prec a_0$

إذن الخاصية صحيحة من أجل n = 0

- ليكن n عنصرا من IN

لنفترض أن : $a_{n+1} \prec a_n$ ولنبين أن : $a_{n+2} \prec a_{n+1}$

لدينا : $a_{n+1} \prec a_n$

و f تزايدية قطعا على المجال $]1,+\infty[$

إذن : $f(a_{n+1}) \prec f(a_n)$

إذن : $a_{n+2} \prec a_{n+1}$

طريقة ثانية:

ليكن n عنصرا من IN

بما أن : $a_{n+1} - a_n = f(a_n) - a_n$

$$= a_n - \sqrt{a_n} + \frac{1}{\sqrt{a_n}} - a_n = \frac{1 - -a_n}{\sqrt{a_n}}$$

وبما أن : $\sqrt{a_n} \succ 0$ و $1 - a_n \prec 0$ (لأن $a_n \succ 1$)

فإن : $\frac{1-a_n}{\sqrt{a_n}} \prec 0$

وبالتالي فإن المتتالية (a_n) بالفعل تناقصية

ج- * استنتاج أن (a_n) متقاربة

بما أن المتتالية (a_n) تناقصية ومصغورة بالعدد 1 (لأن $a_n \succ 1$ لكل n من IN)

فإنها متقاربة

- **تحديد ℓ نهاية المتتالية (a_n)**

بما أن الدالة f متصلة على المجال $]1,+\infty[$

فإن النهاية ℓ تحقق $f(\ell) = \ell$

أي : $\ell - \sqrt{\ell} + \frac{1}{\sqrt{\ell}} = \ell$ أي : $\frac{1-\ell}{\sqrt{\ell}} = 0$

إذن: $\ell = 1$

تمرين 18:

1- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-2\sqrt{1-x}$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2\sqrt{1-x}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)=+\infty$$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+-\infty} x+2\sqrt{1-x}$

$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{2\sqrt{1-x}}{-x}\right)=\lim_{x\to-\infty} x\left(1-\frac{2\sqrt{1-x}}{\sqrt{x^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to-\infty} x\left(1-2\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}\right)=-\infty$$ إذن :

2-أ- الدالة f متصلة في 1 لأن :

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=f(1)$ و $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)$

ب- الدالة f غير قابلة للاشتقاق على اليمين وعلى اليسار في 1.

لأن : $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-\infty$

وهذا يعني هندسيا أن المنحنى (C) يقبل في النقطة $A(1,1)$ مماسا رأسيا

3-أ-

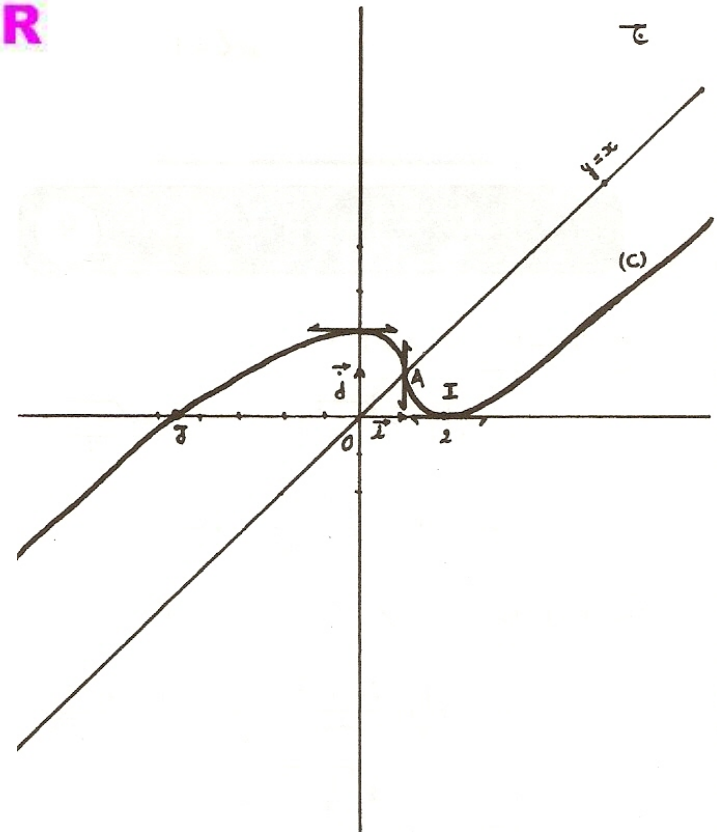
$$\begin{cases} f'(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}} & ;x\succ 1 \\ f'(x)=\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{\sqrt{1-x}} & ;x\prec 1 \end{cases}$$

ب-

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	1	↘	0	↗	$+\infty$

4- أ- (C) يقبل بجوار $+\infty$ و $-\infty$ فرعين شلجميين اتجاههما المستقيم ذو المعادلة $y=x$

ب- يقطع المنحنى (C) محور الأفاصيل في النقطتين $I(2,0)$ و $J(-2-2\sqrt{2},0)$



5-أ- ليكن x عنصرا من المجال $[2,+\infty[$

لدينا : $f(x)=x-2\sqrt{x-1}$

$=x-2(x-1)^{\frac{1}{2}}=x-2(x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}$

يعني أن : $g(x)=\frac{x^2}{2}-2.\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+c$

إذن $=\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}.\sqrt{(x-1)^3}+c$

مع c ثابتة حقيقية

وبما أن $g(2)=\frac{2}{3}$. فإن : $\frac{4}{2}-\frac{4}{3}+c=\frac{2}{3}$

إذن : c=0

وبالتالي فإن : $g(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}(x-1)\sqrt{x-1}$ لكل x من $[2,+\infty[$

ب- لدينا : $\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2}-\frac{4}{3}\sqrt{(x-1)^3}$

$=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{4\sqrt{(x-1)^3}}{3x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{4\sqrt{(x-1)^3}}{3\sqrt{x^4}}\right)$

إذن : $=\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{(x-1)^3}{x^4}}\right)=+\infty$

*لدينا الدالة g قابلة للاشتقاق على $]2,+\infty[$ ولدينا لكل x من $]2,+\infty[$, $g'(x)=f(x)$ (لأن g دالة أصلية للدالة f)

ومنه فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $f(x)$ على $]2,+\infty[$

وحسب جدول تغيرات الدالة f أو التمثيل المبياني للدالة f

نلاحظ أن $f(x)\succ 0$ لكل x من $]2,+\infty[$

وبالتالي فإن الدالة g تزايدية على $[2,+\infty[$

وبالتالي نجد جدول تغيرات الدالة g :

x	2	$+\infty$
g(x)	$\frac{2}{3}$	$+\infty$