تمرين 1 :

.I

1. حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$.
2. نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$.
   - a. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا .
   - b. حدد الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث : $P(z)=(z-2i)(az^2+bz+c)$.
   - c. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

.II

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي : $z_A=4+i$; $z_B=4-i$; $z_C=-i$

1. مثل النقط A و B و C .
2. لتكن Ω النقطة ذات اللحق 2 . نسمي S صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$. حدد لحق النقطة S .
3. بين أن النقط B و A و S و C تنتمي إلى نفس دائرة (Γ) ينبغي تحديد مركزها و شعاعها . أرسم (Γ).

تمرين 2 :

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي هما : $z_A=i$; $z_B=2$

.I

1) حدد لحق النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{2}$.
2) حدد لحق النقطة B' صورة النقطة B_1 بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{4}$.
3) مثل النقط A و B و B' .

.II

نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات اللحق z' بحيث: $z'=(1+i)z+1$.

1) حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.
2) أ - بين أنه $\frac{z'-z}{i-z}=-i$ لكل z مخالف للعدد i.

   ب - بين أن : $\begin{cases} MM'=MA \\ (\overline{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MM'}})\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ لكل نقطة M مخالفة للنقط A .

   ج - استنتج طريقة لإنشاء النقطة M' انطلاقا من النقطة M حيث $M\neq A$.
3) حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث : $|z-2|=\sqrt{2}$.
4) أ - بين أن : $z'-3-2i=(1+i)(z-2)$ لكل عدد عقدي z.

   ب - استنتج أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Γ) فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

تمرين 3 :

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر النقط I ; A ; B التي ألحاقها على التوالي هي 1 ; $1-2i$; $-2+2i$. لتكن (C) الدائرة التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

1) أنشئ النقط I ; A ; B.
2) حدد z_Ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (C) . احسب شعاع الدائرة (C) .
3) لتكن D النقطة ذات اللحق $z_D=\frac{3+9i}{4+2i}$.

حدد الشكل الجبري للعدد z_D ثم بين أن النقطة D تنتمي للدائرة (C) .

3) لتكن E ، النقطة ذات اللحق z_E ، التي تنتمي للدائرة $(\mathcal{C})$ و التي تحقق $\overline{(\overrightarrow{\Omega I}\ ,\ \overrightarrow{\Omega E})} \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

4) أ ـ حدد معيار و عمدة العدد $z_E + \frac{1}{2}$.

ب ـ استنتج أن $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$.

تمرين 4 :

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O\ ;\ \vec{u}\ ,\ \vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C و D و E اللتي ألحقاها على التوالي هي : $z_A = 1-i$ و $z_B = 3+i$ و $z_C = -3$ و $z_D = 2$ و $z_E = -4$.

نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث: $z' = (1+i)z+1$.

1) حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ ـ بين أن $OMEM'$ متوازي الأضلاع إذا، و فقط إذا، كان $z^2-3z+3=0$.

ب ـ حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-3z+3=0$.

3) أ ـ عبر عن $z'+4$ بدلالة $z-2$.

ب ـ استنتج أن $|z'+4| = |z-2|^2$ ثم عبر $\arg(z'+4)$ بدلالة $\arg(z-2)$.

ج ـ بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و شعاعها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها.

تمرين 5 :

1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) : $z^2+z+1=0$

2) نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة (F): $z^2=\bar{z}$

أ- بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة (F) فإن $z=0$ أو $|z|=1$.

ب- بين أن المعادلة (F) تكافئ المعادلة : $z^3=1$ أو $z=0$.

3) حل المعادلة (F) في $\mathbb{C}$.

تمرين 6 :

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O\,;\vec{u}\ ,\vec{v})$ ، نعتبر النقط :

- النقطة A ذات اللحق $a=7-i\sqrt{3}$.
- النقطة B ذات اللحق $b=5+3i\sqrt{3}$.
- النقطة Q منتصف القطعة [OB] .

1) أ ـ ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$. حدد الكتابة العقدية للدوران R .

ب ـ بين أن $R(A)=B$ ثم استنتج طبيعة أن المثلث OAB.

2) حدد q لحق النقطة Q .

3) حدد k لحق النقطة K بحيث يكون ABQK متوازي الأضلاع .

4) بين أن $\frac{k-a}{k}$ تخيلي صرف . ما ذا نستنتج بالنسبة للمثلث OKA ؟

5) لتكن C النقطة ذات اللحق $c=\frac{2a}{3}$ ؟

أ ـ أحسب $\frac{k-b}{k-c}$.

ب ـ ما ذا نستنتج بالنسبة للنقط B و C و K ؟

تمرين 7 :

1) حل في مجموعة الأعداد العقدية كل من المعادلتين التاليتين :

أ ـ $z^4=1$ (يمكن ملاحظة أن $z^4-1=(z^2-1)(z^2+1)$)

ب - $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^4 = 1$

2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و ليكن A عددا عقديا .

نعتبر المعادلة ذات المجهول العقدي z : $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = A$ (E) .

P و Q و M هي النقط ذات الألحاق i و $-i$ و z على التوالي .

أ - بين أنه إذا كان z حل للمعادلة (E) فإن $\frac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|A|}$.

ب - بين أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي على الأقل فإن $|A| = 1$.

ج - استنتج أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي فإن جميع حلولها حقيقية .

تمرين 8 :

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتان لحقاهما على التوالي هما :

$z_A = 1$; $z_B = -2$.

نربط كل عدد عقدي z مخالف ل -2 بالعدد Z المعرف ب : $Z = \frac{z-1}{z+2}$.

1) حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z في كل من الحالتين التاليتين :

أ - $|Z| = 1$ ب - $Z \in \mathbb{R}$

2) أ - بين أنه لكل z مخاف ل -2 لدينا : $(Z-1)(z+2) = -3$

ب - نعتبر النقطة M ذات اللحق z و النقطة M' التي لحقها Z .

بين أن : $M' \neq A$ ثم حدد $AM' \times BM$ و $\overline{(\vec{u},\overrightarrow{BM})} + \overline{(\vec{u},\overrightarrow{AM'})}$.

ج - علما أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها B و شعاعها 3 بين أن M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

3) أ - حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث $Z \in i\mathbb{R}$.

ب - لكل عدد حقيقي غير منعدم x نضع $d = \frac{1+2ix}{1-ix}$ و نسمي D النقطة ذات اللحق d .

حدد الشكل الجبري للعدد $\frac{d-1}{d+2}$ ثم استنتج أن النقطة D تنتمي ل (Γ) .

ج - ليكن θ عنصرا من المجال $]-\pi,\pi[$. نضع $f = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{i\theta}$ و نسمي F النقطة ذات اللحق f .

* بين أن العدد $U = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ تخيلي صرف .

* بين أن $\frac{f-1}{f+2} = U$. ماذا نستنتج بالنسبة للنقطة F ؟