

تمرين رقم 1 :

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ :

و ليكن (Cf) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} - x & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ x^3 \ln x - \frac{x^2}{2} & (x > 0) \end{cases}$$

- 1- بين أن f متصلة في الصفر.
- 2- أدرس اشتقاق f في الصفر .
- إعط التاويل الهندسي لهذه النتيجة .
- 3- أدرس نهايات f عند محددات مجال تعريفها.
- 4- أدرس تغييرات f .
- 5- أ- أدرس الفروع اللانهائية للمنحنى (Cf) .
ب- حدد وضع (Cf) بالنسبة للمستقيم المقارب .
- 6- أنشئ (Cf) علما أنه يقبل نقطتي انعطاف أفصولهما مختلفا الإشارة .

الحل :

1- لنبين أن f متصلة في الصفر : (الطريقة نبين $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^3 \ln x - \frac{x^2}{2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \times x \ln x - \frac{x^2}{2} = 0 = f(0) \quad **$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} - x = 0 = f(0) \quad **$$

(لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$)

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ فإن الدالة f متصلة في الصفر.

2- لندرس اشتقاق f في الصفر : (لنحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 \ln x - \frac{x^2}{2} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x - \frac{x}{2} = 0 \quad **$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} - x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{\frac{1}{x}} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} - 1 = \lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t - 1 = -1 \quad **$$

بوضع $t = \frac{1}{x}$ $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} - 1$ تصبح على الشكل $\lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t - 1$ ولدينا $\lim_{t \rightarrow -\infty} t e^t = 0$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ فإن (Cf) يقبل نصف مماس أفقي معادلته $y = f(0) = 0$

(لأن معادلة المماس ل (Cf) في الصفر هي : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$)

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = -1$ فإن (Cf) يقبل نصف مماس معادلته $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$y = -x \text{ أي } y = -1(x - 0) + 0 \text{ يعني}$$

3- لنحسب نهايات f عند محددات مجموعة التعريف .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \ln x - \frac{x^2}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(x \ln x - \frac{1}{2} \right) = +\infty \quad **$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - \frac{1}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} - x = +\infty **$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ لأن}$$

4 - تغييرات الدالة f :

$$f(x) = e^{\frac{1}{x}} - x : x \in]-\infty, 0[\text{ ليكن } ***$$

$$f(x) = x^3 \ln x - \frac{x^2}{2} : x \in]0, +\infty[\text{ ليكن } ***$$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}} - x \right)' = \left(e^{\frac{1}{x}} \right)' - 1 = \left(\frac{1}{x} \right)' e^{\frac{1}{x}} - 1$$

$$f'(x) = \left(x^3 \ln x - \frac{x^2}{2} \right)' = \left(x^3 \ln x \right)' - \left(\frac{x^2}{2} \right)'$$

$$= \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} - 1 = \frac{-e^{\frac{1}{x}} - x^2}{x^2}$$

$$= 3x^2 \ln x + x^3 \times \frac{1}{x} - \frac{2x}{2}$$

$$= 3x^2 \ln x + x^2 - x$$

$$= -\frac{e^{\frac{1}{x}} + x^2}{x^2}$$

** إشارة f'(x) لكل x ∈ ℝ .

*** f'(x) = 3x^2 ln x + x^2 - x في المجال]0, +∞[.

نلاحظ أن f'(1) = 3ln1 + 1^2 - 1 = 0 .

إذا كان 0 < x ≤ 1 فإن 3ln x ≤ 0 ومنه 3ln x + 1 ≤ 1 وبالتالي x^2(3ln x + 1) ≤ x^2 ونعلم أن x^2 ≤ x لكل 0 < x ≤ 1

إذا كان x ≥ 1 فإن 3ln x ≥ 0 ومنه 3ln x + 1 ≥ 1 وبالتالي x^2(3ln x + 1) ≥ x^2 ونعلم أن x^2 ≥ x لكل x ≥ 1

إذن : x^2(3ln x + 1) ≤ x

x ≥ 1

ومنه : x^2(3ln x + 1) - x ≤ 0

إذن : x^2(3ln x + 1) ≥ x

بمعنى أن : f'(x) ≤ 0 لكل x ∈]0, 1]

ومنه : x^2(3ln x + 1) - x ≥ 0

بمعنى أن : f'(x) ≥ 0 لكل x ∈ [1, +∞[

$$f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}} + x^2}{x^2} \text{ في المجال }]-\infty, 0[\text{ ***}$$

لدينا f'(x) = -\frac{e^{\frac{1}{x}} + x^2}{x^2} < 0 لكل x ∈]-\infty, 0[.

** نضع جدول تغييرات الدالة f .

x	-\infty	0	1	+\infty
f'	-	-	○	+
f	+\infty	0	-\frac{1}{2}	+\infty

5 - أ - الفروع اللانهائية :

** لدينا : \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \ln x - \frac{x^2}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln x - \frac{x}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x \ln x - \frac{1}{2} \right) = +\infty *$$

إذن : (Cf) يقبل فرعاً شلجماً باتجاه محور الأرتيب بجوار +∞ .

** لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x} = 0 \text{ إذن } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 : \text{ لأن } \right) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} - 1 = -1 *$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} - x + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 *$$

إذن : (Cf) يقبل مقاربا مائلا معادلته : $y = -x + 1$ بجوار $-\infty$.

ب - الوضع النسبي لـ (Cf) و المقارب المائل $y = -x + 1$.

$$f(x) - (-x + 1) = e^{\frac{1}{x}} - x + x - 1 = e^{\frac{1}{x}} - 1 *$$

$$f(x) - (-x + 1) \neq 0 \text{ إذن } e^{\frac{1}{x}} - 1 \neq 0 \text{ ومنه } e^{\frac{1}{x}} \neq 1 \text{ فإن } \frac{1}{x} \neq 0 *$$

$$f(x) - (-x + 1) < 0 \text{ ومنه } e^{\frac{1}{x}} - 1 < 0 \text{ وبالتالي } e^{\frac{1}{x}} < 1 \text{ ومنه } \frac{1}{x} < 0 \text{ فإن } x < 0 *$$

نستنتج أن (Cf) تحت المقارب المائل $y = -x + 1$.

6 - التمثيل المبياني

