

تمرين 1

احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x(x-2)} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{x-3} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 1}{1 - x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 - 1}{2x^2 + 5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \operatorname{tg} x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{3x-3}}{x-4} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x^2+x+4}-4} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \sqrt{x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5x+3} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x+9}-3} ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2-3x+x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 - 2x + 5} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3 + x^2 - 7 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^3 - 7x} - \sqrt{x} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{x+15} - 2}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x} - \sqrt[6]{x}} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x+1} - 1} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cos x \sin x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{2 \cos x - \sqrt{2}} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1) \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(\sin x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1 - \cos x)}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2+x)^3 - 8}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + |x|}{3x - 2|x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \cos^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2 - 1)}{\sin(x-1)} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{|x|}}{|x|} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\cos(2 \operatorname{tg} x) - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{tg} x \right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right)$$

$$** \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x - \sin x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sin x} - \sqrt[3]{1 - \sin x}}{\operatorname{tg} x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2 + x)}{2x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{x}\right) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \operatorname{tg} x - \sin x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi(\cos^2 x - \cos x)}{2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{\operatorname{tg} 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin 2x} ; \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x-4}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + 1} ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) \operatorname{tg}^2 x$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}} - \sqrt{1 + \sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}}$$

تمرين 2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. ادرس زوجية الدالة f .
3. اعط جدول تغيرات الدالة f .
4. لتكن g قصور الدالة f على المجال $[3, +\infty[$.

أ. بين أن g تقابل من المجال $[3, +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده.ب. حدد الدالة العكسية للدالة g لكل x من J .

تمرين 3

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = 2\sqrt{x} - x$$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. أحسب نهايات f عند محداث D_f .
3. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين صفر، ثم أول النتيجة هندسيا.
4. ضع جدول تغيرات الدالة f .
5. لتكن g قصور الدالة f على المجال $[0; 1]$.

6. بين أن f تقابل من D_f نحو مجال J يجب تحديده.

7. حدد تعبير $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 7

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I =]1, +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$

- بين أنه: $\forall x \in I, f(x) = \sqrt{1 + \frac{2}{x-1}}$
- بين أن f تناقصية قطعاً على المجال I .
- بين أن f تقابل من I نحو I .
- حدد الدالة العكسية f^{-1} .

تمرين 8

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$$

- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
- أحسب نهايات f عند محددات D_f .
- حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث: $(\forall x \in D_f): f(x) = a + \frac{b}{1 - \sqrt{x}}$
- بين أن f تزايدية قطعاً على المجال $]0; 1[$.
- ليكن g قصور الدالة f على المجال $]0; 1[$.
 - بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} .
 - حدد مجموعة تعريف g^{-1} .
 - حدد تعبير g^{-1} .

تمرين 9

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

- بين أنه لكل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) > 0$.
- أحسب نهايات f عند محددات حيز تعريف الدالة f .
- ادرس تغيرات الدالة f .
- بين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}): \frac{-1}{f(x)} = x - \sqrt{x^2 + 1}$
- بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال J من \mathbb{R} يجب تحديده.

a. بين أن g تقابل من المجال $]0; 1[$ نحو

مجال J يجب تحديده.

b. حدد تعبير g^{-1} .

تمرين 4

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$$

- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
- بين أن f متصلة على D_f .
- بين أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- اعط جدول تغيرات الدالة f .
- لتكن h قصور الدالة f على المجال $]1; +\infty[$.
 - بين أن h تقابل من المجال $]1; +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده.
 - حدد الدالة العكسية للدالة h لكل x من J .

تمرين 5

نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$g(x) = (\sqrt{x} - 2)^2$$

- حدد D_g .
- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
- ادرس تغيرات الدالة g .
- ليكن h قصور الدالة g على المجال $I =]0, 4[$.

a. بين أن h تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده.

b. بين أن (C_h) و $(C_{h^{-1}})$ منطبقان لكل

x من المجال I .

تمرين 6

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = x + 2\sqrt{x-3} - 2$$

- حدد D_f .
- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- بين أن: $(\forall x \in D_f): f(x) = (\sqrt{x-3} + 1)^2$
- ادرس قابلية اشتقاق f على يمين 3.
- اعط تغيرات الدالة f .

تمرين 13

نعتبر الدالة العددية h المعرفة بما يلي:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3 - 1} + 1}$$

1. حدد D_h .
2. أحسب نهايات f عند محداث D_h .
3. بين أن h تناقصية قطعاً على D_h .
4. بين أن h تقابل من D_h نحو مجال J يجب تحديده.
5. حدد $h^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 14

نعتبر الدالة العددية g المعرفة بما يلي:

$$g(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$$

1. حدد D_g .
2. أحسب نهايات g عند محداث D_g .
3. بين أن g تناقصية قطعاً على $]-1; 0[$.
4. بين أن g تقابل من $]-1; 0[$ نحو مجال J يجب تحديده.
5. حدد g^{-1} .

تمرين 15

نعتبر الدالة العددية h للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$h(x) = (x+1)\sqrt{x+1} - 1$$

1. حدد D_h .
2. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.
3. بين أن h تزايدية قطعاً على D_h .
4. بين أن h تقابل من D_h نحو جزء من \mathbb{R} يجب تحديده.
5. حدد تعبير $h^{-1}(x)$.

تمرين 16

حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$(E_1): \sqrt[3]{(x+1)^2} - 3\sqrt[3]{x+1} + 2 = 0$$

$$(E_2): \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[6]{1-x^2}$$

$$t = \sqrt[6]{\frac{1+x}{1-x}}$$

6. حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

7. استنتج تغيرات الدالة f^{-1} .

تمرين 10

لتكن الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{|x-2| - 2}$$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 2$.
3. اعط تأويلاً هندسياً للنتيجة المحصلة عليها.

تمرين 11

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1. ادرس اتصال الدالة f في $x_0 = 0$.
2. ادرس زوجية الدالة f .
3. ادرس رتابة الدالة f على \mathbb{R}^+ ثم استنتج رتابتها على \mathbb{R} .
4. بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال J يجب تحديده.
5. حدد الدالة العكسية f^{-1} .

تمرين 12

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 1}$$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
3. بين أن f تزايدية قطعاً على $I = [0, +\infty[$.
4. لتكن g قصور الدالة f على المجال I .
أ. بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يجب تحديده.
ب. حدد الدالة العكسية للدالة g لكل x من J .

تمرين 23

لتكن f دالة متصلة على المجال $[0;1]$ بحيث:

$$\forall x \in [0;1], 1 < f(x) \leq 2$$

ولتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ بما يلي:

$$\forall x \in [0;1], g(x) = xf(x) - 1$$

1. بين أن g متصلة على المجال $[0;1]$.

2. حدد إشارة كل من $g(0)$ و $g(1)$.

3. استنتج أن: $\exists c \in]0;1[f(c) = \frac{1}{c}$

تمرين 24

لتكن f دالة عددية متصلة على المجال $[0;1]$ حيث:

$$f(0) = 0 \text{ و } f(1) = 1$$

بين أن: $\exists c \in]0;1[f(c) = \frac{1-c}{1+c}$

تمرين 25

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي:

$$f(x) = x - \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x}$$

1. تحقق من أن:

$$\forall x > 0 \quad f(x) = x \left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \right)$$

2. احسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

3. ليكن x و y من $[1; +\infty[$ بحيث $x < y$

قارن $f(x)$ و $f(y)$ ثم استنتج رتبة f

على $[1; +\infty[$.

4. بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

في المجال $[1; +\infty[$.

5. بين أن α يحقق: $\alpha^3 - 4\alpha^2 - \alpha = 0$

6. استنتج قيمة α .

ذ. علي تاموسيت

tamoussit2009@gmail.com

http://www.9alami.com

$$(E_3): \sqrt[3]{(1+x)^2} + 4\sqrt[3]{(1-x)^2} = 4\sqrt[3]{1-x^2}$$

وضع: $t = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}$

تمرين 17

بين أن المعادلة:

$$\theta \in]0; \pi[; \cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = 0$$

تقبل حلا على الأقل.

تمرين 18

نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما

$$g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3$$

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α

من المجال $\left] \frac{5}{2}; 3 \right[$.

تمرين 19

بين أن المعادلة $x^3 + 4x + 2 = 0$ تقبل حلا وحيدا في

\mathbb{R} .

تمرين 20

أوجد معادلة معاملاتها أعداد صحيحة نسبية تقبل العدد

$$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$$

تمرين 21

بين أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$ حيث:

$$1 - \sin \alpha = \alpha$$

تمرين 22

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما

$$f(x) = \operatorname{tg} x - x - 1$$

1. بين أن f متصلة على $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.

2. بين أن f تزايدية قطعا على $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$.

3. حدد صورة المجال $\left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$ بالدالة f .

4. استنتج أن:

$$\left(\exists! \alpha \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[\right): \operatorname{tg} \alpha = \alpha + 1$$