MAROC - CONCOURS NATIONAL COMMUN **FILIERE MP**

SESSION 2000

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

* * *

Définitions et notations

Pour $n \in \mathsf{N}$, on pose :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+1)!}.$$

Pour $(x,t) \in [0,1]^2$, on pose :

$$K(x,t) = \frac{t^2}{x} \text{ si } x > t,\ K(x,t) = K(t,x) \text{ si } t > x \text{ et } K(x,x) = x.$$

On désigne par $\mathcal{C}([0,1])$ l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ vers R. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$ on pose :

$$Tf\ :\ [0,1] \mapsto \mathsf{R},\ x \mapsto \int_0^1 K(x,t)f(t)\ dt.$$

On notera en général de la même façon une fonction et une de ses restrictions à un sous intervalle de son intervalle de définition maximum.

Partie I

1. Vérifier que $x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^{2n+\frac{3}{2}}$ définit une fonction G sur R_+, de classe C^1.

2. Exprimer pour $x \in \mathsf{R}_+$, $xG'(x) + \dfrac{3}{2}G(x)$ à l'aide de fonctions usuelles simples.

Partie II

1. (a) Pour $f \in \mathcal{C}([0,1])$, préciser $Tf(0)$ et montrer la continuité de Tf en 0.
   (b) Montrer que $f \mapsto Tf$ définit un endomorphisme T de $\mathcal{C}([0,1])$.

2. T est-il surjectif?

3. Soit $f \in \mathcal{C}([0,1])$. On pose $F = Tf$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in]0,1]$ on a :

   $$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x t^2 f(t)\ dt + x^2 \int_x^1 \frac{f(t)}{t}\ dt.$$

   (b) Montrer que F est de classe C^1 sur $[0,1]$. Calculer $F(0)$ et $F'(0)$. Établir une relation entre $F(1)$ et $F'(1)$.
   (c) Montrer que F est de classe C^2 sur $]0,1]$ et vérifie sur $]0,1]$ l'équation différentielle

   $$y'' - \frac{2}{x^2}y = -3f.$$

4. On considère l'équation différentielle

$$(E_0)\ :\ x^2y'' - 2y = 0.$$

   (a) Trouver les solutions de (E_0) sur $]0,1]$ de la forme $x \mapsto x^\lambda,\ \lambda \in \mathsf{Z}$.

   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E_0) sur l'intervalle $]0,1]$.

   (c) En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$, Tf est la seule solution sur $]0,1]$ de l'équation différentielle

$$y'' - \frac{2}{x^2}y = -3f$$

   vérifiant $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x) = 0$ et $y'(1) + y(1) = 0$.

5. On dira qu'un réel λ est valeur propre de T s'il existe $f \in \mathcal{C}([0,1])$ tel que $Tf = \lambda f$ et $f \neq 0$. Dans ce cas, on dira que f est un vecteur propre de T associé à λ.

   Montrer que λ est une valeur propre non nulle de T si et seulement s'il existe une solution non nulle sur $]0,1]$ de l'équation différentielle

$$\lambda x^2y'' + (3x^2 - 2\lambda)y = 0$$

   vérifiant $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} y(x) = 0$ et $y'(1) + y(1) = 0$.

Partie III

Soit $\lambda \in \mathsf{R}^{+*}$. On considère l'équation différentielle

$$(E_\lambda)\ :\ \lambda x^2y'' + (3x^2 - 2\lambda)y = 0.$$

1. Montrer qu'il existe une et une seule solution f_λ de (E_λ) sur R développable en série entière au voisinage de 0 telle que

$$f_\lambda(x) \underset{0}{\sim} x^2.$$

2. Donner $K_\lambda \in \mathsf{R}^*$ tel que

$$\forall x \in \mathsf{R}_+,\ f_\lambda(x) = K_\lambda\sqrt{x}\ G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\ x\right).$$

3. (a) Justifier l'existence de $a > 0$ tel que f_λ ne s'annule pas sur l'intervalle $]0,a]$.

   (b) Soit y une solution de (E_λ) sur $]0,1]$. On pose $z = \frac{y}{f_\lambda}$. Donner une équation différentielle du premier ordre vérifiée par z'.

   (c) En déduire qu'il existe une solution g_λ de (E_λ) sur $]0,1]$ telle $g_\lambda(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

4. Une telle solution g_λ étant choisie.

   (a) Montrer que la famille (f_λ, g_λ) d'éléments de $\mathcal{C}(]0,1])$ est libre.

   (b) Décrire alors l'ensemble $\sum_0$ des solutions sur $]0,1]$ de l'équation différentielle (E_λ).

   (c) Montrer que les solutions de (E_λ) sur $]0,1]$ qui tendent vers 0 quand x tend vers 0 sont exactement les éléments de $Vect(f_\lambda)$.

5. (a) Montrer que toute valeur propre strictement positive de T est de la forme $\lambda_k = \dfrac{3}{k^2\pi^2}$ pour un certain $k \in \mathsf{N}^*$.

   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathsf{N}^*$, λ_k est effectivement valeur propre de T.

   (c) Donner les vecteurs propres associés à la valeur propre λ_k, $k \in \mathsf{N}^*$.

Partie IV

On considère l'espace préhilbertien $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire $(f,g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$ pour f et g dans E. On notera $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire. (On ne demande pas de redémontrer que l'on a bien défini un produit scalaire).

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on pose $h_k\ :\ [0,1] \mapsto \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}\ G(k\pi x)$ et $\varphi_k = \frac{h_k}{\|h_k\|}$.

1. Montrer que $\forall (f,g) \in E^2,\ \ (Tf, g) = (f, Tg)$.
2. (a) Calculer Th_k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   (b) Montrer que la famille $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est une famille orthonormée de E.
3. (a) Développer en série de Fourier la fonction $f\ :\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, 2π-périodique, définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{\pi^2}$.

   (b) En déduire
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

   (c) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 K^2(x,t)\ dxdt$ et comparer le résultat avec $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_k^2$.
4. Pour tout $x \in [0,1]$, on note $K_x\ :\ [0,1] \mapsto \mathbb{R},\ t \mapsto K(x,t)$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, soit $K_{N,x}$ la projection orthogonale de K_x sur $Vect(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$.

   (a) Donner l'expression de $K_{N,x}$.

   (b) Établir $\displaystyle\lim_{N \to +\infty} \int_0^1 \|K_x - K_{N,x}\|^2\ dx = 0$.

   (c) Soit $f \in E$ et $F = Tf$. Montrer que
   $$\lim_{N \to +\infty} \|F - \sum_{k=1}^{N} (F, \varphi_k)\varphi_k\|^2 = 0.$$

   (On remarquera que $\forall x \in [0,1],\ F(x) = (K_x, f)$.)

Fin de l'épreuve