Concours National Commun

Epreuve 1 : $\mathcal{MP}$

Session 2003

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Définitions et Notations

On travaille dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, qui est l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$; on notera aussi $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ (resp . $\mathcal{C}^p(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$) le sous-espace des fonctions continues (resp . de classes $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs complexes .Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^{\mathbb{R}}$ on pose $\widehat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)dt$. lorsque cette quantité a un sens .

Quand elle est définie ,La fonction $\widehat{f}$ s'appelle la transformée de FOURIER de f .

I.ETUDE D'UN EXEMPLE

1. Soeint x, α deux réels strictement positifs .
   (a) Justifier l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \frac{1-e^{-t}}{t}$ sur l'intervalle $]0, \alpha]$.
   (b) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $[x, +\infty[$.
2. Dans la suite , φ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.
   (a) Montrer que , pour tout réel strictement positif x on a : $0 < \varphi(x) < \frac{e^{-x}}{x}$.
   (b) Justifier que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner l'expression de φ' .
   (c) Montrer que , lorsque x tend vers 0^+ , $\varphi(x) + \ln x$ tend vers $C = \varphi(1) - \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-t}}{t} dt.$ (on pourra exprimer $\ln x$ sous forme d'une intégrale .)
   (d) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) + \ln x = C + \displaystyle\int_0^x \frac{1-e^{-t}}{t} dt$, et en déduire que
   $$\varphi(x) + \ln x = C + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{x^k}{k!}.$$
3. Soit ψ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par
   $$\psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(|x|).$$
   (a) Montrer que ψ est intégrable sur les deux intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
   (b) Justifier que , pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x)$ a un sens et que
   $$\widehat{\psi}(x) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\cos(xt)dt.$$

(c) Montrer que $\widehat{\psi}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer ses dérivées successives sous forme d'intégrales .

(d) Montrer que, pour tout réel non nul x, on a

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt,$$

et calculer $\widehat{\psi}(0)$.

4. (a) Montrer que la fonction $\Phi : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\sin(xt)dt$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $\Phi'(x)$, pour tout $x>0$, puis l'exprimer sans utiliser le signe intégral .

(b) En déduire soigneusement que pour tout réel non nul x,

$$\widehat{\psi}(x) = \frac{\arctan x}{x}.$$

II.QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UNE FONCTION

1. **Transformée de Fourier d'une fonction intégrable**

(a) Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que pour tout réel x, $\widehat{f}(x)$ est bien définie et que la fonction $\widehat{f}$ est bornée .

(b) Si de plus f est continue, montrer $\widehat{f}$ que est aussi continue .

2. **Transformations**

(a) Montrer que l'application $F : \varphi \mapsto \widehat{\varphi}$, définie sur l'espace vectoriel des fonctions complexes continues par morceaux et intégrables sur $\mathbb{R}$, a valeur dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$, est linéaire .

Dans la suite de cette question, f est une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Vérifier que pour tout réel a, les fonctions $f_a(t) = f(t-a)$ et ${}_af(t) = f(at)$ possédent des transformés de Fourier et montrer que pour tout réel x, $\widehat{f_a}(x) = e^{-iax}\widehat{f}(x)$ et $\widehat{{}_af}(x) = \frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{x}{a}\right)$ $(a \neq 0)$.

(c) Exprimer de même la transformée de Fourier de l'application $t \mapsto f(t)e^{iat}$ en fonction de celle de f .

(d) Si f est paire (resp. impaire), donner une expression de sa transformée de Fourier sous forme d'une intégrale sur $[0,+\infty[$.

(e) Que peut-on alors dire de la transformée de Fourier d'une fonction réelle paire (resp. impaire) .

3. **Dérivation**

On considére un élément f de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; on suppose que f et f' sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que f tend vers 0 en $\pm\infty$.

(b) Montrer alors que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f'}(x) = ix\widehat{f}(x)$, puis en déduire que $\widehat{f}$ tend vers 0 en $\pm\infty$.

(c) On suppose de plus que l'application $g : t \mapsto tf(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$; montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(\widehat{f}\right)'(x) = -i\widehat{g}(x)$.

III.UNE FORMULE D'INVERSION

A-Un autre exemple

Dans cette section, h désigne la fonction $t \mapsto e^{-t^2}$; on admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = \sqrt{\pi}$.

1. Vérifier que $\widehat{h}$ est bien définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait l'équation différentielle $y' + \frac{x}{2}y = 0. \qquad (1)$
2. Résoudre l'équation différentielle (1) et donner l'expression de $\widehat{h}$.
3. Donner alors l'expression de la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto e^{-\varepsilon t^2}, \varepsilon > 0$.

B-Application à la formule d'inversion

Dans cette section, f désigne une fonction continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\widehat{f}$ soit aussi intégrable sur $\mathbb{R}$. Soit $(\varepsilon_n)_n$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0.

1. (a) Soit $v \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. En utilisant le théorème de la convergence dominée, montrer que $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)e^{-\varepsilon_n y^2}dy = \int_{-\infty}^{+\infty} v(y)dy.$

   (b) Montrer de même que si $w \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ est une fonction bornée alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} w(x + \varepsilon_n y)e^{-y^2}dy = w(x)\sqrt{\pi}.$
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon_n y^2}dy\right)dt = 2\sqrt{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x+ 2\sqrt{\varepsilon_n s})e^{-s^2}ds.$
3. Soit x un nombre réel.

   (a) Justifier que pour tout couple (p, q) d'entiers naturels non nuls et tout $\varepsilon > 0$, $\int_{-p}^{p} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt\right.$ $\int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-p}^{p} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt.$

   (b) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{q \longrightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-q}^{q} f(t)e^{-iyt}dt\right)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-iyt}\right.$

   (c) Montrer que, pour tout entier naturel non nul q et tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{p \longrightarrow +\infty} \int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-p}^{p} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt =$ $\int_{-q}^{q} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt.$

   (d) En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iy(t-x)-\varepsilon y^2}dy\right)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy-\varepsilon y^2}\widehat{f}(y)dy.$
4. Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy}\widehat{f}(y)dy.$

FIN DE L'ÉPREUVE

FIN

Mamouni My Ismail PCSI 2 Casablanca Maroc