Concours National Commun

Epreuve 2 : $\mathcal{MP}$

Session 2003

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Notations et rappels

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectorieldes matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est tout simplement noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n a coefficients dans $\mathbb{K}$; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se note I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la transposée de A ; si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Sp_{\mathbb{K}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$, $Tr(A)$ sa trace et $rg(A)$ son rang.

Soeint A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; on considére l'application, notée $\Phi_{A,B}$, suivante

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{A,B} : & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & AX + XB \end{array}$$

Si $B = A$, $\Phi_{A,B}$ sera notée simplement Φ_A .

1^{ere} Partie

1. Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; montrer que $Sp_{\mathbb{K}}(C) = Sp_{\mathbb{K}}({}^tC)$.
2. Montrer que l'application $\Phi_{A,B}$ est linéaire .
3. Soient $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (resp. $W \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) un vecteur propre de A (resp. ${}^tB$) associé à la valeur propre a (resp. b) .
   (a) Expliciter les coefficients de la matrice $V{}^tW$ en fonction des coefficients $v_1, \ldots, v_n$ de V et $w_1, \ldots, w_n$ de W, et en déduire que la matrice $V{}^tW$ n'est pas nulle .
   (b) Montrer que la matrice $V{}^tW$ est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$; à quelle valeur propre est-il associé ?
4. Soit λ une valeur propre de $\Phi_{A,B}$ et $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ un vecteur propre associé .
   (a) Montrer que pour tout entier naturel k, $A^kY = Y(\lambda I_n - B)^k$.
   (b) En déduire que pour tout polynôme P, à coefficients dans $\mathbb{K}$, $P(A)Y = YP(\lambda I_n - B)$.
   (c) On suppose que le polynôme caracteristique P_A de A scindé sur $\mathbb{K}$ et s'ecrit

$$P_A = (-1)^n \prod_{\mu \in Sp_{\mathbb{K}}(A)} (X - \mu)^{\beta_\mu}.$$

- Montrer que $YP_A(\lambda I_n - B) = 0$ et en déduire que la matrice $P_A(\lambda I_n - B)$ n'est pas inversible .

-En déduire qu'il existe $a \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda - a)I_n - B$ ne soit pas inversible .

5. Conclure que si le polynôme P_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors $Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) = Sp_{\mathbb{K}}(A) + Sp_{\mathbb{K}}(B)$.
6. Soient $(Y_1, \ldots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et $Z_1, \ldots, Z_p$ des vecteurs arbitraires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Montrer que l'égalité $\sum_{i=1}^{p} Y_i^t Z_i = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \ldots, Z_p$ sont tous nuls .
7. On suppose ici que les matrices A et B sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on désigne par $(U_1, \ldots, U_n)$ et $(W_1, \ldots, W_n)$ des bases respectives de vecteurs propres de A et ${}^tB$. En considérant la famille $(U_i^t W_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, montrer que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable .
8. On suppose que les deux matrices A et B sont réelles et symétriques d'ordre n.
   (a) Montrer que l'application $<,>: (M, N) \mapsto Tr({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que si C et D sont deux matrices d'ordre n, alors $Tr(DC) = Tr(CD)$.
   (c) Montrer alors que $\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$.

2^{eme} Partie

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on considére une matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, symétrique et définie positive. On muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire définie à la fin de la partie précédente .

1. Montrer que les valeurs propres de S sont strictement positives .
2. En déduire alors que l'automorpisme autoadjoint Φ_S est definie positif .
3. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; montrer que X est symetrique si et seulement si $\Phi_S(X)$ l'est aussi .
4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ une matrice symetrique réelle d'ordre 2 .
   (a) On suppose que A est définie positive ; montrer alors que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$.
   (b) Soit $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ un vecteur de composantes x et y ; exprimer ${}^tUAU$ en fonction de a, b, c, x et y et montrer que si $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$ alors A est définie positive .
   (c) On suppose ici que A est définie positive. On considère une matrice $X_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\lambda > 0$. Calculer la matrice $\Phi_A(X_\lambda)$ et montrer qu'on peut trouver des valeurs b et λ pour lesquelles cette matrice ne soit pas définie positive .
5. Justifier qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que

$$S = PDP^{-1}.$$

Dans la suite, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de la matrice D : $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

6. Dans cette question, on considère une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on pose $M = \Phi_S(X)$; on pose aussi $Y = P^{-1}XP$ et $N = P^{-1}MP$. On note $n_{i,j}$ les coefficients de la matrice N et $y_{i,j}$ ceux de Y .

   (a) Vérifier que $N = \Phi_S(Y)$ et exprimer les coefficients $y_{i,j}$ à l'aide des λ_k et des coefficients de la matrice N .

   On suppose désoramis que la matrice M est symétrique et définie positive .

   (b) Montrer que la matrice N est symétrique et définie positive .

   (c) Soit U un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $u_1, \dots, u_n$.

   - Montrer que ${}^tUYU = \displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j} u_i u_j$.
   - Soit $\alpha > 0$; montrer que l'application $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0,1]$.
   - On note $U(s)$ le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $u_1 s^{\lambda_1 - \frac{1}{2}}, \dots, u_n s^{\lambda_n - \frac{1}{2}}$, $s \in]0,1]$. Justifier que l'application $s \mapsto^t U(s)NU(s)$ est continue et intégrable sur l'intervalle $]0,1]$.
   - Exprimer l'intégrale de la fonction précédente en fonction de ${}^tUNU$ et en déduire que si U est non nul, alors ${}^tUYU > 0$.

   (d) Conclure que la matrice X est symétrique définie positive .

3^{eme} Partie

Dans cette partie, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et on étudie la dimension du noyau de l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ dans le cas où $B = -A$. On muni $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de l'une de ses normes .

1. On suppose que $A = \Delta$ où Δ la matrice $diag(\mu_1, \dots, \mu_n)$ avec les μ_i deux à deux distincts .

   (a) On prend $n = 2$; déterminer $\mathrm{Ker}\Phi_{A,-A}$; quelle est sa dimension ?

   (b) On revient au cas général.
   Déterminer $\mathrm{Ker}\Phi_{A,-A}$; quelle est sa dimension ?

2. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres deux à deux distincts .

   (a) Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (b) En utilisant les résultats de la question précédente, montrer que la dimension de $\mathrm{Ker}\Phi_{A,-A}$ est égale à n .

3. (a) Montrer que l'application $A \mapsto \Phi_{A,-A}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

   (b) Soit $q \in \mathbb{N}^*$, avec $q \leqslant n$. Montrer que l'application $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mapsto \det\left((a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant q}\right)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

4. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ayant n valeurs propres deux à deux distincts est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.(on pourra utiliser la trigonalisation)

5. Soit r un entier naturel, avec $r \leqslant n$. On admet les deux résultats suivants :

   $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$;
   - *Si le rang de A est égal à r alors il existe une sous-matrice A qui est inversible d'ordre r.*
   - *S'il existe une sous-matrice de la matrice A, qui soit d'ordre r et inversible, alors le rang de A est supérieur ou égal à r .*

(a) Montrer que l'ensemble $O_r = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), rg(C) > r\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(b) Soit $(A_p)_p$ une suite de matrices éléments de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ avec $m \geqslant 2$, toutes de rang $s > 0$ convergeant vers une matrice A. Montrer que le rang de A est inférieur ou égal à s .

6. En utilisant les questions 3. et 4. ainsi qu'une version vectorielle du résultat de la question 5.(b), montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, la dimension du noyau de l'endomorphisme $\Phi_{A,-A}$ est supérieur ou égal à n .

FIN DE L'ÉPREUVE

FIN