ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2006
École Mohammadia d'Ingénieurs
EMI

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **MP**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours MP, comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

NOTATIONS ET RAPPELS

Dans tout le problème, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$. Le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et la matrice identité se notera I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et rg(A) son rang. Si $p = n$, $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{K}$, $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace et χ_A son polynôme caractéristique ; il est défini par

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_n).$$

Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et la j-ème colonne valant 1 ; on rappelle que la famille $\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dite base canonique, et que

$$\forall\, (i, j, k, l) \in \{1, \ldots, n\}^4, \quad E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}, \quad \text{avec} \quad \delta_{j,k} = 1 \text{ si } j = k \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on notera $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ les endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définis par

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad u_{P,Q}(M) = PMQ \quad \text{et} \quad v_{P,Q}(M) = P\,{}^tMQ.$$

PRÉLIMINAIRES

1. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, exprimer les matrices $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (b) On suppose que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AM = MA$; montrer que A est une matrice scalaire, c'est à dire de la forme λI_n avec $\lambda \in \mathbb{K}$.
2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   (a) Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, exprimer la trace de la matrice $AE_{i,j}$.
   (b) On suppose que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,(AM) = 0$; montrer que A est nulle.
3. Montrer que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$.
4. Justifier que, pour tout $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, les endomorphismes $u_{P,Q}$ et $v_{P,Q}$ conservent le rang.

Dans la suite du problème, on admettra que tout endomorphisme Φ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le rang, c'est à dire tel que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{rg}(\Phi(M)) = \mathrm{rg}(M),$$

est de la forme $u_{P,Q}$ ou $v_{P,Q}$ pour un certain couple (P,Q) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

PREMIÈRE PARTIE

A. Étude des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le déterminant

Dans cette section , Φ désigne un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le déterminant, c'est à dire tel que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det \Phi(M) = \det M.$$

Pour tout $r \in \{1,\dots,n\}$, on pose $K_r = I_n - J_r$ où J_r est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Soit $s \in \{1,\dots,n\}$ et soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice quelconque. Montrer que $\det(\lambda J_s + A)$ est, en fonction de $\lambda \in \mathbb{C}$, un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à s.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice de rang $r \in \{1,\dots,n\}$.
   (a) Justifier qu'il existe deux matrices R et S, éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, telles que $M = RJ_rS$.
   (b) On pose $N = RK_rS$; exprimer, en fonction du complexe λ, le déterminant de la matrice $\lambda M + N$.
   (c) On note s le rang de $\Phi(M)$. Montrer que $\det(\lambda\Phi(M) + \Phi(N))$ est, en fonction de $\lambda \in \mathbb{C}$, un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à s, puis en déduire que $r \leqslant s$, c'est à dire $\mathrm{rg}\,(M) \leqslant \mathrm{rg}\,(\Phi(M))$.
3. Montrer alors que l'endomorphisme Φ est injectif puis justifier qu'il est inversible.
4. Vérifier que l'endomorphisme Φ^{-1} conserve le déterminant.
5. Conclure que l'endomorphisme Φ conserve le rang et préciser toutes ses formes possibles.

B. Étude des endomorphismes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le polynôme caractéristique

Dans cette section, Φ désigne un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conserve le polynôme caractéristique, c'est à dire tel que

$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \chi_{\Phi(M)} = \chi_M.$$

1. Montrer que Φ conserve le déterminant et la trace.
2. En déduire qu'il existe un couple (P,Q) d'éléments de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\Phi = u_{P,Q}$ ou $\Phi = v_{P,Q}$.
3. Un tel couple (P,Q) ayant été choisi.
   (a) Montrer que, pour tout couple (i,j) d'éléments de $\{1,\dots,n\}$,$\mathrm{Tr}\,(PE_{i,j}Q) = \mathrm{Tr}\,(E_{i,j})$.
   (b) En déduire que $Q = P^{-1}$.
4. Préciser alors les endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui conservent le polynôme caractéristique.

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, Φ désigne une **application** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dans lui même telle que, pour tout couple (A, B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, les matrices $\Phi(A)\Phi(B)$ et AB aient le même polynôme caractéristique.

1. (a) Pour tout quadruplet $(i, j, k, l) \in \{1, \ldots, n\}^4$, calculer la valeur de $\operatorname{Tr}(\Phi(E_{i,j})\Phi(E_{k,l}))$.
   (b) Montrer alors que la famille $\big(\Phi(E_{i,j})\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $\operatorname{Tr}\Big(\big(\Phi(A + B) - \Phi(A) - \Phi(B)\big)\Phi(E_{i,j})\Big) = 0$.
   (b) En déduire que $\Phi(A + B) = \Phi(A) + \Phi(B)$.
3. Montrer que Φ est linéaire puis justifier que c'est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
4. Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$, la matrice $E_{i,j}$ est nilpotente et en déduire qu'il en est de même pour la matrice $\Phi(E_{i,j})$.
5. Dans la suite de cette partie, on notera $G = (g_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice telle que $\Phi(G) = I_n$.
   (a) Justifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\chi_{\Phi(A)} = \chi_{AG}$.
   (b) Montrer que, pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$, le polynôme caractéristique de la matrice $E_{i,j}G$ est égal à $(-1)^n X^{n-1}(X - g_{j,i})$.
   (c) En déduire que la matrice G est diagonale et que $G^2 = I_n$.
6. On note Ψ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ défini par
$$\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \Psi(A) = \Phi(AG).$$
   (a) Montrer que Ψ conserve le polynôme caractéristique.
   (b) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que
$$\forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(M) = PMGP^{-1} \quad \text{ou} \quad \forall\, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}),\ \Phi(M) = PG\,{}^tMP^{-1}.$$
7. (a) Montrer que, pour tout couple $(A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^2$, $\operatorname{Tr}(AGBG) = \operatorname{Tr}(AB)$.
   (b) En déduire que, pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $GBG = B$.
   (c) Montrer alors que G est une matrice scalaire et qu'il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $G = \varepsilon I_n$.
8. Réciproquement, montrer que si $w = \varepsilon.u_{P,P^{-1}}$ ou $w = \varepsilon.v_{P,P^{-1}}$, avec $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon = \pm 1$, alors l'endomorphisme w de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie bien la propriété
$$\forall\, (A, B) \in \big(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})\big)^2, \quad \chi_{w(A)w(B)} = \chi_{AB}.$$

TROISIÈME PARTIE

On rappelle qu'une matrice symétrique $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si, pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXBX \geqslant 0$; elle est dite définie positive si, pour tout vecteur **non nul** X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXBX > 0$.

On note $S_n(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques ; $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp $S_n^{++}(\mathbb{R})$) désigne le sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formé des matrices symétriques positives (resp. définies positives).

1. Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

   (a) Montrer qu'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = {}^tPDP$. Que représentent pour A les coefficients diagonaux de D ?

   (b) Montrer que A est positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.

   (c) Montrer que A est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont strictement positives.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a) Pour tout réel μ, exprimer $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A + \mu I_n)$ en fonction de $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$.

   (b) En déduire que si A est symétrique, alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x > \alpha$, la matrice $A + xI_n$ est définie positive.

Dans la suite de cette partie, Φ désigne un endomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\Phi(S_n^{++}(\mathbb{R})) = S_n^{++}(\mathbb{R}).$$

3. (a) Justifier que $I_n \in \Phi(S_n(\mathbb{R}))$ puis montrer que l'endomorphisme Φ est surjectif.

   (b) Justifier que Φ est un automorphisme de $S_n(\mathbb{R})$.

4. (a) Montrer que $S_n^+(\mathbb{R})$ est un fermé de $S_n(\mathbb{R})$.

   (b) Montrer que $\Phi(S_n^+(\mathbb{R})) = S_n^+(\mathbb{R})$.

5. Dans cette question, on suppose que $n = 2$ et que $\Phi(I_2) = I_2$.

   (a) Montrer que si $A \in S_2(\mathbb{R})$ possède une *seule* valeur propre alors $\Phi(A) = A$.

   (b) Soit $A \in S_2(\mathbb{R})$ une matrice qui possède deux valeurs propres distinctes λ et μ ; on suppose que $\lambda > \mu$.

      i. Justifier que la matrice $A - \mu I_2$ est symétrique, positive et de rang 1.

      ii. En déduire que la matrice $\Phi(A) - \mu I_2$ est aussi symétrique, positive et de rang 1 puis que $\mu \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\Phi(A))$.

      iii. En utilisant la matrice $-A$, montrer que $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(\Phi(A))$.

   (c) Conclure que, pour toute matrice $A \in S_2(\mathbb{R})$, $\chi_{\Phi(A)} = \chi_A$.

FIN DE L'ÉPREUVE