MAROC - CONCOURS NATIONAL COMMUN **FILIERE MP**

SESSION 2000

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

corrigé par Gilles Deruelle.

Première Partie

1. On a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n+5)(2n+2)} = 0$$

ce qui montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n X^n$ est égal à $+\infty$.

On en déduit que celui de la série entière $\sum u_n x^{2n}$ est égal à $+\infty$. G apparaît donc comme le produit de cette série entière par la fonction $x \mapsto x^{\frac{3}{2}}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.

2.

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \ , \ xG'(x) + \frac{3}{2}G(x) = x\left(x^{\frac{3}{2}}.\sum_{n\geq 0} u_n x^{2n}\right)' + \frac{3}{2}\sum_{n\geq 0} u_n x^{2n+\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}\sum_{n\geq 0} u_n x^{2n} + x^{\frac{5}{2}}\sum_{n\geq 1} 2nu_n x^{2n-1} + \frac{3}{2}\sum_{n\geq 0} u_n x^{2n+\frac{3}{2}}$$

$$= x^{\frac{3}{2}}\left(3\sum_{n\geq 0} u_n x^{2n} + \sum_{n\geq 1} 2nu_n x^{2n}\right) = x^{\frac{3}{2}}\left(3u_0 + \sum_{n\geq 1}(2n+3)u_n x^{2n}\right)$$

$$= x^{\frac{3}{2}}\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} = \sqrt{x}\sin x \ .$$

Deuxième Partie

1. (a) $\forall t \in [0,1], K(0,t) = 0$. On en déduit que $Tf(0) = 0$. On a par ailleurs :

$$\forall x \in]0,1] \ , \ Tf(x) = \int_0^x K(x,t)f(t)dt + \int_x^1 K(x,t)f(t)dt = \frac{1}{x}\int_0^x t^2 f(t)dt + x^2\int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt \ (\star).$$

Cela donne la majoration :

$$\forall x \in]0,1] \ , \ |Tf(x)| \leq \|f\|_\infty \left[\frac{1}{x}x\int_0^x t^2 dt + x^2\int_x^1 \frac{dt}{t}\right] = \|f\|_\infty \left[\frac{x^3}{3} - x^2\ln x\right] \ .$$

On en déduit la continuité de Tf en $x = 0$.

(b) La linéarité de l'opérateur T découle de la linéarité de l'intégrale. Par ailleurs $(\star)$ montre, pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$, la continuité de Tf sur $]0,1]$. Enfin grâce au **1.(a)**: $\forall f \in \mathcal{C}([0,1]), Tf \in \mathcal{C}([0,1])$. En conclusion T est bien un endomorphisme de $\mathcal{C}([0,1])$.

2. T n'est pas surjectif : la question **1.(a)** a montré que pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$, $Tf(0) = 0$; or une fonction de $\mathcal{C}([0,1])$ ne s'annule pas nécessairement à l'origine.

3. (a) On a déjà montré ce résultat à la question **1.(a)**.

   (b) $(\star)$ montre sans difficulté que F est de classe C^1 sur $]0,1]$. On obtient précisément :

   $$\forall x \in]0,1] \ , \ F'(x) = -\frac{1}{x^2}\int_0^x t^2 f(t)dt + 2x\int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt \ .(\star\star)$$

   D'où la majoration :

   $$\forall x \in]0,1] \ , \ |F'(x)| \leq \|f\|_\infty \left[\frac{x^2}{3} - 2x\ln x\right] \ .$$

   On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} F'(x) = 0$, puis classiquement par le théorème de “prolongement C^1” , que F est de classe C^1 sur $[0,1]$ avec $F'(0) = 0$.

   $(\star)$ et $(\star\star)$ montrent que $F(1) + F'(1) = 0$.

   (c) En dérivant $(\star\star)$ il vient :

   $$\forall x \in]0,1] \ , \ F''(x) = \frac{2}{x^3}\int_0^x t^2 f(t)dt + 2\int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt - 3f(x) \ .$$

   On en déduit grâce à $(\star)$:

   $$\forall x \in]0,1] \ , \ F''(x) = \frac{2}{x^2}\left[\frac{1}{x}\int_0^x t^2 f(t)dt + x^2\int_x^1 \frac{f(t)}{t}dt\right] - 3f(x) = \frac{2}{x^2}F(x) - 3f(x) \ .$$

4. (a) Exprimons que $x \mapsto x^\lambda$ est solution de (E_0) :

   $$\forall x \in]0,1] \ , \ \lambda(\lambda-1)x^2 x^{(\lambda-1)(\lambda-2)} - 2x^\lambda = x^\lambda\left[\lambda(\lambda-1)x^{(\lambda-2)^2} - 2\right] = 0 \ .$$

   La seule possibilité est $\lambda = 2$.

   (b) $x \mapsto x^2$ ne s'annulant pas sur $]0,1]$, cherchons une autre solution sous la forme $y = x^2 z$. On est alors ramené à résoudre :

   $$Z = z' \quad \text{et} \quad xZ' + 4Z = 0 \ .$$

   On obtient : $Z = \dfrac{\text{Cste}}{x^4} =$ z' , puis $z = \dfrac{\text{Cste}}{x^3} + \text{Cste}$.

   Une solution de (E_0) indépendante de $x \mapsto x^2$ est par exemple : $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

   Toute solution de (E_0) sur $]0,1]$ s'écrit alors sous la forme :

   $$y(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x} \quad \text{où} \quad \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R} \ .$$

   (c) D'après ce qui précède, f étant donnée, Tf est bien solution du problème posé. Il s'agit donc de montrer que c'est la seule. Supposons pour cela que F et G soient solutions. Alors $F - G$ est solution de (E_0) et en conséquence il existe α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$F(x) - G(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x} \ .$$

   Le fait que $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x) - G(x) = 0$ implique que $\beta = 0$. Il vient alors $F(x) - G(x) = \alpha x^2$, puis $F(1) - G(1) + F'(1) - G'(1) = \alpha + 2\alpha = 0$ entraîne que $\alpha = 0$. Finalement $F = G$.

5. Soit λ une valeur propre non nulle de T et f un vecteur propre associé. $Tf = \lambda f$ est alors solution du problème énoncé à la question **4.(c)**. En particulier :

$$\forall x \in]0,1] \ , \ \lambda f''(x) - \frac{2}{x^2}\lambda f(x) = -3f(x) \ .$$

Ce qui donne :

$$\forall x \in]0,1] \ , \ \lambda x^2 f''(x) + \left(3x^2 - 2\lambda\right) f(x) = 0 \ .$$

Les autres conditions du problème, étant vérifiées par λf, le sont par f.

Réciproquement, on montre par un calcul similaire que si f est une solution non identiquement nulle du problème posé dans cette question $(\lambda \neq 0)$, λf est solution de celui posé à la question **4.(c)** : Tf étant l'unique solution de ce problème, on obtient : $Tf = \lambda f$ avec $f \neq 0$. Ce qui montre que f est valeur propre de T associé à la valeur propre λ.

Troisième Partie.

1.et 2. Exprimons donc qu'une série entière $\sum a_n x^n$ est solution de (E_λ) sur $]-R,R[$:

$$\forall x \in]-R,R[\ , \ \lambda x^2 \sum_{n\geq 2} n(n-1)a_n x^{n-2} + 3x^2 \sum_{n\geq 0} a_n x^n - 2\lambda \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$= -2\lambda(a_0 + a_1 x) + \sum_{n\geq 2} \lambda[n(n-1)-2]a_n x^n + 3\sum_{n\geq 2} a_{n-2}x^n$$

$$= -2\lambda(a_0 + a_1 x) + \sum_{n\geq 2} \left[\lambda(n+1)(n-2)a_n + 3a_{n-2}\right] x^n = 0 \ .$$

Cela exige que $a_0 = a_1 = 0$. On en déduit que tous les coefficients de rang impair sont nuls. Par ailleurs a_2 peut être choisi arbitrairement et l'on a :

$$\forall n \geq 2 \ , \ a_{2n} = \frac{-3}{\lambda(2n+1)(2n-2)} a_{2n-2} \ ,$$

d'où l'on tire :

$$\forall n \geq 1 \ , \ a_{2n} = (-1)^{n-1} \frac{3^n}{\lambda^{n-1}(2n+1)(2n-1)!} a_2 \ .$$

La condition $f_\lambda(x) \sim x^2$ au voisinage de zéro est vérifiée pour $a_2 = 1$. La seule série entière qui répond à la question est alors :

$$f_\lambda(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}3^n}{\lambda^{n-1}(2n+1)(2n-1)!} x^{2n} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{\lambda^n (2n+3)(2n+1)!} x^{2n+2} \ .$$

On vérifie sans difficulté que son rayon de convergence est égal à $+\infty$.

On obtient ensuite :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ f_\lambda(x) = \sqrt{x} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n 3^{n+1}}{\lambda^n (2n+3)(2n+1)!} x^{2n+\frac{3}{2}} = \sqrt{x}\, 3^{\frac{1}{4}} \lambda^{\frac{3}{4}} \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+3)(2n+1)!} \left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} x\right)^{2n+\frac{3}{2}} \ ,$$

c'est à dire :

$$f_\lambda(x) = (3\lambda^3)^{\frac{1}{4}} \sqrt{x}\ G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}} x\right) \ .$$

3. (a) Cela découle directement de $f_\lambda(x) \sim x^2$ au voisinage de zéro.

(b) Classiquement on cherche une solution de (E_λ) sur $]0,a]$ sous la forme $y = f_\lambda z$; un calcul sans difficulté montre que $Z = z'$ est solution de :

$$2f'_\lambda Z + f_\lambda Z' = 0 \ .$$

(c) On obtient alors : $Z = z' = \dfrac{\text{Cste}}{f_\lambda^2}$, puis $y(x) = f_\lambda(x).\displaystyle\int_x^\star \frac{\text{Cste}}{f_\lambda^2(t)}dt$.

La fonction positive $t \mapsto \dfrac{1}{f_\lambda^2(t)}$ n'étant pas intégrable sur $]0,\star]$, on obtient par " intégration des relation de comparaison" , au voisinage de zéro :

$$y(x) \ \sim \ x^2\int_x^\star \frac{dt}{t^4} \ \sim \ \frac{\text{Cste}}{x} \ .$$

Ceci montre qu'il existe une solution y_λ de (E_λ) sur $]0,a]$ vérifiant au voisinage de zéro :

$$y_\lambda(x) \ \sim \ \frac{1}{x} \ .$$

Les solutions maximales de l'équation différentielle $\lambda y'' + \dfrac{3x^2 - 2\lambda}{x^2}y = 0$ sont définies sur $]0,+\infty[$ ou sur $]-\infty,0[$. Le résultat d'existence et d'unicité de telles solutions montre que y_λ se prolonge de façon unique en une solution sur $]0,+\infty[$ de (E_λ). En particulier il existe une solution g_λ sur $]0,1]$ qui prolonge y_λ.

4. (a) Les équivalents respectifs de f_λ et g_λ au voisinage de zéro montrent que ces deux fonctions ne peuvent être colinéaires.

(b) Toute solution de (E_λ) sur $]0,1]$ s'écrit sous la forme :

$$\alpha f_\lambda + \beta g_\lambda, \quad \text{avec} \ \ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

(c) Soit $h = \alpha f_\lambda + \beta g_\lambda$. La condition $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0$ exige clairement $\beta = 0$. Réciproquement ...

5. (a) Utilisons la caractérisation de la question **II-5.** : soit λ une valeur propre non nulle de T ; il existe alors une solution non identiquement nulle de (E_λ) sur $]0,1]$ qui tend vers zéro à l'origine. D'après la question **4.(c)**, cette solution est proportionnelle à f_λ.

Voyons ce qu'entraîne la condition $f'_\lambda(1) + f_\lambda(1) = 0$:

$$f'_\lambda(x) = K_\lambda\left[\frac{1}{2\sqrt{x}}G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}x\right) + \sqrt{\frac{3}{\lambda}}\sqrt{x}\ G'\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}x\right)\right] \ ,$$

donne :

$$f'_\lambda(1) + f_\lambda(1) = K_\lambda\left[G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) + \frac{1}{2}G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) + \sqrt{\frac{3}{\lambda}}\ G'\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right)\right]$$

$$= K_\lambda\left[\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\ G'\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) + \frac{3}{2}G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right)\right] = K_\lambda\left(\frac{3}{\lambda}\right)^{\frac{1}{4}}\sin\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda}}\right) = 0 \ .$$

λ est donc nécessairement de la forme :

$$\lambda = \frac{3}{k^2\pi^2} = \lambda_k \ \ \text{avec} \ \ k \in \mathbb{N}^\star \ .$$

(b) Le calcul effectué dans la question précédente montre que si $\lambda = \lambda_k$, f_{λ_k}, qui est solution de (E_{λ_k}), vérifie bien les conditions requises (cf. question **II-5**) ... : λ_k est valeur propre de T, pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

(c) Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_k est d'après ce qui précède $\mathrm{Vect}(f_{\lambda_k})$.

Quatrième Partie

1. On obtient sans difficulté :

$$\forall (f,g) \in E \ , \ (Tf,g) = (f,Tg) = \int\int_{[0,1]\times[0,1]} K(x,y)f(y)g(x)dxdy \ .$$

2. (a) On a :

$$f_{\lambda_k}(x) = K_{\lambda_k}\sqrt{x}\, G\left(\sqrt{\frac{3}{\lambda_k}}x\right) = K_{\lambda_k}\sqrt{x}\, G\left(k\pi x\right) = \left(3\lambda_k^3\right)^{\frac{1}{4}} h_k(x) = \frac{3}{(k\pi)^{\frac{3}{2}}} h_k(x) \ .$$

D'où :

$$Th_k = \lambda_k h_k = \frac{3}{k^2\pi^2} h_k \ .$$

(b) Il vient pour k et $m \in \mathbb{N}^\star$ distincts :

$$(Th_k, h_m) = \lambda_k(h_k, h_m) = (h_k, Th_m) = \lambda_m(h_k, h_m)$$

qui montre que la famille $(h_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est orthogonale.

On en déduit que la famille $(\Phi_k)_{k\in\mathbb{N}^\star}$ est orthonormale.

3. (a) La fonction f est 2π périodique, continue , C^1 par morceaux et paire : le théorème de Dirichlet permet d'affirmer que f est la somme de sa série de Fourier.

On a :

$$a_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)dt = \frac{4}{3}$$

et

$$\forall n \geq 1 \ , \ a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos nt dt = \frac{-2}{\pi^3}\int_0^\pi t^2 \cos nt dt = \frac{-2}{\pi^3}\cdot\frac{-2}{n}\int_0^\pi t\sin nt dt = \frac{4}{\pi^3 n}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{n}\pi \ .$$

On obtient finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R} \ , \ f(t) = \frac{2}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nt \ .$$

(b) *Parseval* donne :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f^2(t)dt = \frac{8}{15} = \frac{a_0(f)^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} a_n(f)^2 = \frac{4}{9} + \frac{8}{\pi^4}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} \ .$$

D'où :

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{8}\left(\frac{8}{15} - \frac{4}{9}\right) = \frac{\pi^4}{8}\cdot\frac{4}{45} = \frac{\pi^4}{90} \ .$$

(c) Un calcul direct donne :

$$\int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)dxdt = \int_0^1\left(\int_0^x \frac{t^4}{x^2}dt + \int_x^1 \frac{x^4}{t^2}dt\right)dx = \int_0^1\left(\frac{x^3}{5}+x^3-x^4\right)dx = \frac{1}{10}\ .$$

Par ailleurs :

$$\sum_{k\geq 1}\lambda_k^2 = \frac{9}{\pi^2}\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^4} = \frac{9}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^4}{90} = \frac{1}{10}\ .$$

4. (a) On observera que pour tout $x\in[0,1]$, $K_x\in\mathcal{C}([0,1])$. On a :

$$K_{N,x} = \sum_{k=1}^N(\Phi_k,K_x)\Phi_k = \sum_{k=1}^N\left(\int_0^1 K(x,t)\Phi_k(t)dt\right)\Phi_k = \sum_{k=1}^N T\Phi_k(x)\cdot\Phi_k = \sum_{k=1}^N\lambda_k\Phi_k(x)\cdot\Phi_k$$

(b) Il vient :

$$\begin{aligned}\|K_x-K_{N,x}\|^2 &= \|K_x\|^2-\|K_{N,x}\|^2\\ &= \int_0^1 K^2(x,t)dt - \sum_{k=1}^N\lambda_k^2\Phi_k^2(x)\ .\end{aligned}$$

Puis :

$$\int_0^1\|K_x-K_{N,x}\|^2dx = \int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)dxdt - \sum_{k=1}^N\lambda_k^2\int_0^1\Phi_k^2(x)dx = \int_0^1\int_0^1 K^2(x,t)dxdt - \sum_{k=1}^N\lambda_k^2\ .$$

D'après ce qui précède, cette quantité admet pour limite zéro quand N tend vers $+\infty$.

(c) On a donc :

$$\forall x\in[0,1]\ ,\ F(x) = \int_0^1 K_x(t)f(t)dt = (K_x,f) = (K_{N,x},f)+(K_x-K_{N,x},f)$$

et

$$(\Phi_k,F) = (\Phi_k,Tf) = (T\Phi_k,f) = \lambda_k(\varphi_k,f)$$

qui entraînent pour $N\in\mathbb{N}^\star$:

$$\forall x\in[0,1]\ ,\ F(x)-\sum_{k=1}^N(\Phi_k,F)\Phi_k(x) = \sum_{k=1}^N\lambda_k\Phi_k(x)(\Phi_k,f)-\sum_{k=1}^N\lambda_k(\Phi_k,f)\Phi_k(x)+(K_x-K_{N,x},f)\ ,$$

d'où

$$\begin{aligned}\|F-\sum_{k=1}^N(\Phi_k,F)\Phi_k\|^2 &= \int_0^1\left(F(x)-\sum_{k=1}^N(\Phi_k,F)\Phi_k(x)\right)^2dx\\ &\leq \|f\|^2\cdot\int_0^1\|K_x-K_{N,x}\|^2dx\ .\end{aligned}$$

La question précédente montre alors que :

$$\lim_{N\to+\infty}\|F-\sum_{k=1}^N(\Phi_k,F)\Phi_k\|^2 = 0\ .$$

* * *