

Partie I

- 1- Soit $n \in \mathbb{Z}$, l'application $(x, \theta) \mapsto \cos(x \sin(\theta) - n\theta)$ est continue et bornée sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$, donc J_n est bien définie et bornée sur \mathbb{R} .
- 2- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Effectuer le chgt de variable affine $u = \pi - \theta$ dans l'intégrale définissant J_{-n} , pour obtenir :
- $$J_{-n}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\pi - u) - n(\pi - u)) du = (-1)^n J_n(x).$$
- 3- Soit $n \in \mathbb{Z}$, l'application $(x, \theta) \mapsto \cos(x \sin(\theta) - n\theta)$ est C^∞ sur $\mathbb{R} \times [0, \pi]$. Par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, J_n est de classe C^∞ et pour tout $p \in \mathbb{N}$,
- $$J_n^{(p)}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial^p}{\partial x^p} (\cos(x \sin(\theta) - n\theta)) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^p(\theta) \cos(x \sin(\theta) - n\theta + p\frac{\pi}{2}) d\theta$$
- 4- En posant
- $$\begin{aligned} g_x(\theta) &= -x^2 \sin^2(\theta) \cos(x \sin(\theta) - n\theta) - x \sin(\theta) \sin(x \sin(\theta) - n\theta) \\ &\quad + (x^2 - n^2) \cos(x \sin(\theta) - n\theta) \\ &= x \sin(\theta) \sin(n\theta - x \sin(\theta)) + x^2 \cos^2(\theta) - n^2 \cos(x \sin(\theta) - n\theta) \\ &= \frac{d}{d\theta} ((x \cos(\theta) + n) \sin(x \sin(\theta) - n\theta)) \end{aligned}$$
- on a
- $$\begin{aligned} x^2 J_n(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi g_x(\theta) d\theta \\ &= [(x \cos(\theta) + n) \sin(x \sin(\theta) - n\theta)]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$
- 5- Cours : Equation différentielle lineaire, sans second membre, du 2^{sd} ordre, résolue en y'' sur $I = \mathbb{R}_+^*$, donc l'espace des solutions sur \mathbb{R}_+^* est de dimension 2.

Partie II

- 1- Lemme de Granwall :
- Fixons $y \in \mathbb{R}_+^*$ et posons $w(x) = \left(\int_y^x u(t)v(t) dt \right) \exp \left(\int_y^x v(t) dt \right)$ pour $x > 0$
- (a) Si F désigne une primitive de l'application continue sur \mathbb{R}_+^* : $f : x \mapsto u(x)v(x)$, et V celle de l'application v , alors $w(x) = (F(x) - F(y)) \exp(V(x) - V(y))$ qui est dérivable sur \mathbb{R}_+^* comme composée d'applications dérivables (elle est même C^1).
- On a $w'(x) = \frac{d}{dx} w(x)$
- $$\begin{aligned} &= u(x)v(x) \exp \left(\int_y^x v(t) dt \right) + \left(\int_y^x u(t)v(t) dt \right) \frac{d}{dx} \exp \left(\int_y^x v(t) dt \right) \\ &= \underbrace{u(x)v(x) \exp \left(\int_y^x v(t) dt \right)}_{\frac{d}{dx} \exp \left(\int_y^x v(t) dt \right)} + \left(\int_y^x u(t)v(t) dt \right) \frac{d}{dx} \exp \left(\int_y^x v(t) dt \right) \\ &= \left(u(x) + \int_y^x u(t)v(t) dt \right) \frac{d}{dx} \exp \left(\int_y^x v(t) dt \right) \\ &= \left(\underbrace{u(x) - \int_x^{+\infty} u(t)v(t) dt}_{\leq A} + \int_y^{+\infty} u(t)v(t) dt \right) \frac{d}{dx} \exp \left(\int_y^x v(t) dt \right) \\ &\leq \alpha(y) \frac{d}{dx} \exp \left(\int_y^x v(t) dt \right) \quad \text{car} \quad u(x) - \int_x^{+\infty} u(t)v(t) dt \leq A \end{aligned}$$
- D'où
- $$\forall s \in \mathbb{R}_+^*, \quad w'(s) \leq \alpha(y) \frac{d}{ds} \exp \left(\int_y^s v(t) dt \right)$$
- (b) Soit $x \in]0, y]$, par intégration de l'inégalité précédente sur $[x, y]$, on obtient :
- $$w(y) - w(x) \leq \alpha(y) \left[1 - \exp \left(\int_y^x v(t) dt \right) \right] = \exp \left(\int_y^x v(t) dt \right) \left[\alpha(y) \exp \left(\int_x^y v(t) dt \right) - \alpha(y) \right]$$
- Or $w(y) = 0$, donc $-w(x) \exp \left(\int_y^x v(t) dt \right) \leq \alpha(y) \exp \left(\int_x^y v(t) dt \right) - \alpha(y)$, soit encore $\alpha(y) -$

$$w(x) \exp\left(\int_y^x v(t) dt\right) \leq \alpha(y) \exp\left(\int_x^y v(t) dt\right)$$

En utilisant l'expression de $w(x)$, on a :

$$\begin{aligned} \alpha(y) - w(x) \exp\left(\int_y^x v(t) dt\right) &= \alpha(y) + \int_x^y u(t)v(t) dt \\ &= \alpha(y) - \underbrace{\int_y^{+\infty} uv + \int_x^{+\infty} uv}_{=A} = \alpha(x) \end{aligned}$$

et par suite :

$$u(x) \leq \alpha(x) \leq \alpha(y) \exp\left(\int_x^y v(t) dt\right) \text{ avec } 0 < x \leq y.$$

Faisons tendre y vers $+\infty$, dans l'inégalité précédente, en tenant compte de $\lim_{y \rightarrow +\infty} \alpha(y) = A$, il vient :

$$\forall x > 0, \quad u(x) \leq A \exp\left(\int_x^{+\infty} v(t) dt\right)$$

2- Autour de l'équation différentielle $F_q : y'' + (1+p)y = 0$

(a) Résolution de F_0 : équation différentielle linéaire à coefficients constants, son équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$. Donc les solutions réelles sont de la forme $y = A \cos(x) + B \sin(x)$ où A, B sont des constantes réelles.

(b) La méthode de variations des constantes permet de conclure : posons $y(x) = \lambda(x) \cos(x) + \mu(x) \sin(x)$ où λ, μ sont au moins de classe C^1 .

y est solution de l'équation proposée ssi $\begin{cases} \lambda' \cos(x) + \mu' \sin(x) = 0 \\ -\lambda' \sin(x) + \mu' \cos(x) = -pf \end{cases}$ ssi

$$\begin{cases} \lambda' = \begin{vmatrix} 0 & \sin(x) \\ pf & \cos(x) \end{vmatrix} = -pf \sin(x) \\ \mu' = \begin{vmatrix} \cos(x) & 0 \\ -\sin(x) & pf \end{vmatrix} = pf \cos(x) \end{cases} \quad \text{Avec } \lambda(x) = -\int_b^x p(t)f(t) \sin(t) dt \text{ et } \mu(x) = \int_b^x p(t)f(t) \cos(t) dt.$$

Les solutions de l'équation différentielle avec second membre sont de la forme :

$$\begin{aligned} y(x) &= A \cos(x) + B \sin(x) + \lambda(x) \cos(x) + \mu(x) \sin(x) \\ &= A \cos(x) + B \sin(x) + \int_b^x f(t) \underbrace{(-p(t) \sin(t) \cos(x) + p(t) \cos(t) \sin(x))}_{k_p(x,t)} dt \end{aligned}$$

(c) z est solution de F_p ssi z vérifie $z'' + z = -pz$. Comme en **b**) on obtient $z(x) = A \cos(x) + B \sin(x) + \int_b^x z(t)k_p(x,t) dt$ avec

3- Soit $n \in \mathbb{Z}$.

(a) Soit $q \in C^2(\mathbb{R}^{*+}, \mathbb{R})$ tel que $I_n = \frac{J_n}{q}$ est solution d'une équation différentielle de type (F_{p_n}) , on alors :

$$\begin{aligned} J_n' &= q' I_n + q I_n', \quad J_n'' = q'' I_n + 2q' I_n' + q I_n'' \text{ et puis :} \\ 0 &= (x^2 - n^2) J_n + x J_n' + x^2 J_n'' \\ &= ((x^2 - n^2)q + xq' + x^2 q'') I_n + (xq + 2x^2 q') I_n' + x^2 q I_n'' \quad (**) \end{aligned}$$

L'équation différentielle **(**)** est type F_{p_n} ssi $\begin{cases} xq + 2x^2 q' = 0 \\ x > 0 \end{cases}$ et $q(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ est une solution qui convient et dans ce cas $p_n(x) = -\frac{n^2}{x^2} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x}}{x^3}$ qui est définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .

(b) On rappelle $k_{p_n}(x, t) = -p_n(t) \sin(t) \cos(x) + p_n(t) \cos(t) \sin(x) = -p_n(t) (\sin(x-t))$.

$$\begin{aligned} \left| I_n = \frac{J_n}{q} \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ car } |J_n| \leq 1, \text{ donc} \\ \left| I_n(t) k_{p_n}(x, t) \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{t}} |p_n(t)| = O\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right) \text{ et comme l'application } t \mapsto I_n(t) k_{p_n}(x, t) \text{ est continue sur } [1, +\infty[, \end{aligned}$$

son intégrabilité sur $[1, +\infty[$ en résulte.

L'expression de $k_{p_n}(x, t)$ montre que $x \mapsto \int_1^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt$ est une combinaison linéaire des fonctions $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

- (c) I_n vérifie sur \mathbb{R}_+^* : $I_n'' + I_n = -p_n I_n$, donc d'après 2.c) I_n est de la forme : $I_n(x) = A \cos(x) + B \sin(x) + \int_1^x I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt$ ici $b = 1$

Or $\int_1^x I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt = \int_1^{+\infty} - \int_x^{+\infty} = \alpha \cos(x) + \beta \sin(x) - \int_x^{+\infty}$ avec α et β des constantes réelles (voir

question 3.b)). Donc $I_n(x) = C \cos(x) + D \sin(x) - \int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt$ avec C, D des réelles qui ne dépendent -a priori- que de n

- (d) $|I_n(x)| \leq |C| + |D| + \left| \int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt \right|$ qui résulte de $\left\{ \begin{array}{l} \text{Inégalité triangulaire} \\ \text{intégrale et valeur absolue} \\ \text{expression de } K_{p_n}(x, t) \end{array} \right.$
- $$\leq |C| + |D| + \int_x^{+\infty} |I_n(t)| |p_n(t)| dt$$

Par le lemme de Granwall (voir question 1.b)

$|I_n(x)| \leq M \exp\left(\int_x^{+\infty} |p_n(t)| dt\right) \leq M \exp\left(\int_1^{+\infty} |p_n(t)| dt\right)$ où $M = |C| + |D|$ et de plus $C = D = 0$, on a $M = 0$ et puis $I_n \equiv 0$ sur \mathbb{R}_+^* , impossible car J_n est non nulle.

Remarque : on peut démontrer que I_n est bornée sans utiliser le lemme de Granwall.

- (e) Par transformation trigonométrique, on a :

$$\begin{aligned} J_n(x) = qI_n &= \frac{1}{q(x)} (A \cos(x) + B \sin(x)) - \frac{1}{q(x)} \int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} (A_n \cos(x + \beta_n)) - \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt. \end{aligned}$$

$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} I_n(t)k_{p_n}(x, t)dt \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} |I_n(t)| |k_{p_n}(x, t)| dt \leq \frac{\alpha}{\sqrt{x}} \int_x^{+\infty} |p_n(t)| dt$. où α est un majorant de $|I_n|$.

L'expression de p_n montre que $\int_x^{+\infty} |p_n(t)| dt \leq \frac{cte}{x\sqrt{x}} + \frac{cte}{x^{3/2}\sqrt{x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$

D'où $J_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} (A_n \cos(x + \beta_n)) + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Partie III

Ici $n \in \mathbb{N}$.

1- Quelques propriétés de J_n .

- (a) Pour $(m, k) \in \mathbb{N}^{*2}$, on a :

$$\begin{aligned} J_{m-1}^{(k-1)}(0) - J_{m+1}^{(k-1)}(0) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{(k-1)}(\theta) \cos((m-1)\theta + (k-1)\frac{\pi}{2}) d\theta \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{(k-1)}(\theta) \cos((m+1)\theta + (k-1)\frac{\pi}{2}) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^k(\theta) (2 \sin(\theta m) \sin(\frac{1}{2}\pi k) - 2 \cos(\theta m) \cos(\frac{1}{2}\pi k)) d\theta \\ &= 2 \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^k(\theta) (\cos(\theta m + \frac{1}{2}\pi k)) d\theta \\ &= J_m^{(k)}(0) \end{aligned}$$

- (b) Soit $n > 0$ et $k \in \{0, \dots, n-1\}$, on a :

$$J_n^{(0)}(0) = J_n(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{n} \sin(n\theta)\right]_0^\pi = 0$$

supposons que $J_n^k(0) = 0$ pour tout $k \in [0, n-2]$, on a alors :

$$2J_n^{(k+1)}(0) = J_{n-1}^{(k-1)}(0) - J_{n+1}^{(k-1)}(0) = 0$$

- (c) Calcul de $J_n^{(n)}(0)$:

$$2J_n^{(n)}(0) = J_{n-1}^{(n-1)}(0) - J_{n+1}^{(n-1)}(0) = J_{n-1}^{(n-1)}(0). \text{ d'où } J_n^{(n)}(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} J_1^{(1)}(0).$$

Or $J_1'(0) = \frac{1}{2} (J_0(0) - J_2(0))$ (relation de 3.1.a), donc $J_1'(0) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}$. D'où finalement $J_n^{(n)}(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(d) La formule de Taylor-Young à l'ordre n autour de 0, donne :

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} J_n^{(k)}(0) x^k + o(x^n) = \frac{x^n}{2^n n!} + o(x^n) \text{ car } J_n^{(k)}(0) = 0 \text{ pour tout } k < n.$$

Ceci montre bien que $J_n(x)$ est de signe de $\frac{x^n}{2^n n!}$ sur un voisinage pointé en 0, d'où l'existence de $\alpha > 0$ telle que J_n est strictement positive sur $]0, \alpha]$.

2- C'est du cours : (voir aussi 3-)

3- J_n solution non nulle sur $]0, \alpha]$ de $(E_n) \Leftrightarrow \phi_f = \frac{f}{J_n}$ est solution de l'équation différentielle : $z'' = \left(2 \frac{J_n'(x)}{J_n(x)} + \frac{1}{x}\right) z' \Leftrightarrow \frac{d}{dx} \phi_f$ est solution de $(\varepsilon_n) : z' = \left(-\frac{2n+1}{x} + \psi_n(x)\right) z = 0$, avec $\psi_n(x) = \frac{2n}{x} - 2 \frac{J_n'(x)}{J_n(x)}$.

(a) La solution générale de l'équation différentielle (ε_n) est de la forme : $z(x) = \lambda \exp\left(\int_{\alpha}^x \left(-\frac{2n+1}{t} + \psi_n(t)\right) dt\right)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$, soit $z(x) = \lambda_n \frac{1}{x^{2n+1}} \exp\left(\int_{\alpha}^x \psi_n(t) dt\right)$ où $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $\lambda_n = -\frac{1}{2^n n!} \frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n}$, alors $y_n(x) = J_n(x) \phi_{y_n}(x)$ est une solution de (E_n) telle $\frac{d\phi_{y_n}}{dx} = -\frac{1}{x^{2n+1}} \frac{1}{2^n n!} \frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n} \exp\left(\int_{\alpha}^x \psi_n(t) dt\right) = -\frac{1}{x^{2n+1}} (1 + \zeta_n(x))$, avec $\zeta_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{J_n(\alpha)}{\alpha^n} \exp\left(\int_{\alpha}^x \psi_n(t) dt\right) - 1$.

Vu l'expression de ψ_n l'application ζ est définie et continue sur $]0, \alpha]$. De plus par $J_n(x) = \frac{x^n}{2^n n!} + x^n o(1)$ au voisinage de 0 et $\exp\left(\int_{\alpha}^x \psi_n(t) dt\right) = \left(\frac{x^n}{J_n(\alpha)}\right)^2 \cdot \left(\frac{\alpha^n}{J_n(\alpha)}\right)^2$, on a bien $\lim_{x \rightarrow 0^+} \zeta(x) = 0$.

Pour $n = 0$, avec $\lambda_0 = -\frac{1}{J_0(\alpha)}$, le calcul direct donne le résultat.

(c) Pour $n = 0$, on a $\frac{d\phi_{y_0}}{dx} = -\frac{1}{x^1} J_0(\alpha) \exp\left(\int_{\alpha}^x \psi_0(t) dt\right) = -\frac{1}{x}$, donc $\phi_{y_0}(x) = -\ln(x) + c$ où c est un réel et puis $y_0(x) = J_0(x) \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right) + c\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$ car $J_0(0) = 1$.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{d\phi_{y_n}}{dx} = -\frac{1}{x^{2n+1}} (1 + \zeta_n(x))$, avec $\lim_{x \rightarrow 0^+} \zeta_n(x) = 0$, on reconnaît le développement asymptotique de $\frac{d\phi_{y_n}}{dx}$ qui s'intègre car ζ est prologéable par continuité sur $[0, \alpha]$. D'où $\phi_{y_n}(x) = \frac{1}{2^n x^{2n}} + \frac{1}{x^{2n}} o(1) \dots$ et puis $y_n(x) = J_n(x) \frac{1}{2^n x^{2n}} + J_n(x) \frac{1}{x^{2n}} o(1)$. Mais $\frac{J_n(x)}{x^n} = \frac{1}{2^n n!}$, donc $y_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty$.

5- Sur \mathbb{R}_+^* , le thm de Cauchy-lipschitz s'applique, soit alors N_n une solution sur \mathbb{R}_+^* de (E_n) telle que $N_n\left(\frac{\alpha}{2}\right) = y_n\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ et $N_n'\left(\frac{\alpha}{2}\right) = y_n'\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

N_n et y_n coïncident sur $]0, \alpha]$, donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} N_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y_n(x) = +\infty$.

6- Sur \mathbb{R}_+^* , l'ensemble des solutions $S_H(E_n)$ de l'équation différentielle (E_n) est un espace vectoriel de dimension deux, engendré par (J_n, N_n) . Donc toute solution y de (E_n) sur \mathbb{R}_+^* est de la forme : $y(x) = A J_n(x) + B N_n(x)$ où A, B sont des constantes réelles.

Comme J_n est bornée, alors y est bornée ssi $B = 0$. (en prenant $y = 0$, ceci permet aussi de montrer que la famille (J_n, N_n) est libre). D'où V ensemble des solutions bornées de (E_n) sur \mathbb{R}_+^* est un sous-espace vectoriel de $S_H(E_n)$ de dimension 1 engendré par J_n .

Partie IV

Remarquons d'abord que :

- la fonction f est continue, de classe C^1 par morceaux et paire
- la fonction g est continue, impaire et de classe C^1 sur \mathbb{R} .

1- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(g) = 0$ car g est une fonction impaire de même pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n(f) = 0$ car f est paire

Par les relations liants les coefficients de Fourier trigonométriques et les coef. exponentiels et parités des fonctions f et g , on a :

$$\begin{cases} a_n(f) = 2c_n(f) \\ b_n(g) = 2ic_n(g) \end{cases} \quad \text{D'autre part on a : } c_n(g') = -inc_n(g), \text{ d'où } a_n(g') = -nb_n(g).$$

Mais $g' = f - 1$, donc $a_n(g') = a_n(f) - \underbrace{\int_0^1 \cos(2n\pi t) dt}_{=0}$ car $w = \frac{2\pi}{T} = \pi$ et puis $a_n(g') = a_n(f)$. par ce qui

précède $a_n(f) = a_n(g') = -nb_n(g)$.

2- Pour $x = 0$, $\int_0^\pi \cos(\theta) d\theta = [\sin(\theta)]_0^\pi = 0$

$$\begin{aligned} \text{Pour } x \neq 0, \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) \cos(\theta) d\theta &= \frac{1}{x} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) d(x \sin(\theta)) \\ &= \frac{1}{x} [\sin(x \sin(\theta))]_0^\pi \\ &= 0. \end{aligned}$$

(a) Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, J_1(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^1 \cos(xt) \sqrt{1-t^2} dt$

Avec la transformation $\cos(x \sin(\theta) - \theta) = \cos(x \sin(\theta)) \cos(\theta) + \sin(x \sin(\theta)) \sin(\theta)$ on a :

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(\theta) - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos(x \sin(\theta)) \cos(\theta) + \sin(x \sin(\theta)) \sin(\theta)) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \underbrace{\int_0^\pi \cos(x \sin(\theta)) \cos(\theta) d\theta}_{=0} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin(\theta)) \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin(\theta)) \sin(\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^\pi \sin(x \sin(\theta)) \sin(\theta) d\theta \end{aligned}$$

Faisons le chgt de variable $t = \pi - \theta$, dans la seconde intégrale, il vient :

$$J_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(x \sin(t)) \sin(t) dt$$

Puis par le chgt de variable $u = \cos(t)$, on obtient : $J_1(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\sin(xu)}{\sqrt{1-u^2}} du$

Et enfin par une intégration par parties $\begin{cases} U = x \sin(xu) \\ V = \sqrt{1-u^2} \end{cases}$, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} J_1(x) &= \int_0^1 U dV = [UV]_{u=0}^{u=1} - \int_0^1 V dU \\ &= -[x \sin(xu) \sqrt{1-u^2}]_{u=0}^{u=1} + \int_0^1 \cos(xu) \sqrt{1-u^2} du \\ &= \int_0^1 \cos(xu) \sqrt{1-u^2} du \end{aligned}$$

Finalement

$$J_1(x) = \frac{2x}{\pi} \int_0^1 \cos(xu) \sqrt{1-u^2} du$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $a_n(f) = 2 \int_0^1 f(t) \cos(2n\pi t) dt = 2 \int_0^1 \cos(2n\pi t) \sqrt{1-t^2} dt = \frac{\pi}{2n\pi} J_1(2n\pi)$
D'où

$$a_n(f) = \frac{1}{2n} J_1(2n\pi).$$

4- Convergence uniforme de la série de Fourier de f

(a) D'après II-3-c), pour n assez grand : $J_1(2n\pi) = \frac{A_1}{\sqrt{2n\pi}} \sin(2n\pi + \beta_1) + O(\frac{1}{n^{3/2}}) = \frac{K}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{n^{3/2}})$ avec $K = \frac{A_1 \sin(\beta_1)}{\sqrt{2\pi}}$. D'où $a_n(f) = \frac{1}{2n\pi} J_1(2n\pi) = \frac{Cte}{n^{3/2}} + O(\frac{1}{n^{3/2}}) = O(\frac{1}{n^{3/2}})$

(b) Par $a_n(f) = O(\frac{1}{n^{3/2}})$, le terme général de la série de Fourier de f vérifie $|a_n(f) \cos(n\pi t)| \leq |a_n(f)| \leq \frac{c^{te}}{n^{3/2}}$, il y'a convergence normale (donc uniforme) de la série de fourier de f sur \mathbb{R} .

(a) Voir la remarque ci-dessus...

(b) Résultats du cours (thm de Dirichlet de convergence normale des séries de fourier)

6- Sous les hypothèses f est continue sur \mathbb{R}

f est de classe C^1 par morceaux sur \mathbb{R}

f est à points de discontinuités réguliers

la conclusion en résulte.

Partie V

1- Comme J_0 est bornée sur \mathbb{R}_+ , et $t \mapsto e^{-pt}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ pour tout $p > 0$, alors l'application continue $t \mapsto J_0(t)e^{-pt}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ pour tout $p > 0$.

2- Les inégalités de 5.2) sont immédiates car les fonctions facteur de e^{-pt} sont majorées en valeur absolue par 1

3- Pour $p > 0$ fixé, et $a > 0$, on a :

$$\left| \int_0^{+\infty} J_0(t)e^{-pt} dt - \int_0^a J_0(t)e^{-pt} dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} J_0(t)e^{-pt} dt \right| \leq \frac{e^{-ap}}{p} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0$$

D'où $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a J_0(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} J_0(t)e^{-pt} dt$. Mais

$$\int_0^a J_0(t)e^{-pt} dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_0^a e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) d\theta \right) dt \stackrel{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_0^a e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) dt \right) d\theta$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) dt \right) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_0^a e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) dt \right) d\theta \right| \\ = \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) dt \right) d\theta \right| \\ \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) dt \right| d\theta \\ \leq \frac{e^{-ap}}{p} \xrightarrow{a \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

De ces résultats on déduit que :

$$\forall p \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(x \sin(\theta)) dt \right) d\theta$$

4- Ecrivons $e^{-pt} \cos(t \sin(\theta)) = \Re(e^{-pt} e^{i(t \sin(\theta))}) = \Re(e^{t(-p+i \sin(\theta))})$, alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(t \sin(\theta)) dt = \Re \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{t(-p+i \sin(\theta))} dt \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Comme } \int_0^x e^{t(-p+i \sin(\theta))} dt &= \left[\frac{1}{-p+i \sin(\theta)} e^{t(-p+i \sin(\theta))} \right]_{t=0}^{t=x} \\ &= \left(\frac{-p}{p^2 + \sin^2 \theta} - i \frac{\sin \theta}{p^2 + \sin^2 \theta} \right) (e^{x(-p+i \sin(\theta))} - 1) \end{aligned}$$

et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x(-p+i \sin(\theta))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} |e^{x(-p+i \sin(\theta))}| = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-xp} = 0$ car $p > 0$, on a alors :

$$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos(t \sin(\theta)) dt = \Re \left(\frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} + i \frac{\sin \theta}{p^2 + \sin^2 \theta} \right) = \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta}$$

Par $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta \stackrel{\text{chgt de var } \theta \leftrightarrow \pi/2 - \theta}{=} \int_0^{\pi/2} \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta$ on a :

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

Pour le calcul de l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta$ on fait le chgt de variable $u = \tan(\theta)$, alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{p}{p^2 + \sin^2 \theta} d\theta &= \int_0^{+\infty} \frac{p}{(p^2 + \frac{u^2}{1+u^2})(1+u^2)} du \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{p}{(p^2 + (1+p^2)u^2)} du \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(\frac{x\sqrt{p^2+1}}{p})}{\sqrt{p^2+1}} \\
&= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}
\end{aligned}$$

Finalemment $F(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2+1}}$ pour tout $p > 0$