Concours National Commun

Epreuve 2 : $\mathcal{MP}$

Session 2003

1^{ere} Partie

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$; montrer que $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(C) \Leftrightarrow \det(A-\lambda I_n)=0 \Leftrightarrow \det({}^tA-\lambda I_n)=0 \Leftrightarrow \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}({}^tC)$. NB $\det(M)=\det({}^tM) \quad \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Il est clair que $\Phi_{A,B}(X+\lambda Y)=\Phi_{A,B}(X)+\lambda\Phi_{A,B}(Y)$.

3. (a) En notant les coefficients de la matrice V^tW par $(V^tW)_{i,j}$ on a $(V^tW)_{i,j}=v_iw_j$. D'autre part $V\neq 0$ car vecteur propre, donc $\exists 1\leq i\leq n$ tel que $v_i\neq 0$, de même $\exists 1\leq j\leq n$ tel que $w_j\neq 0$, d'où $\exists 1\leq i,j\leq n$ tel que $(V^tW)_{i,j}=v_iw_j\neq 0$ et donc la matrice V^tW est non nulle.

   (b) On a $AV=av,{}^tBW=bW$ donc $AV=av,{}^tWB=b^tW$ $\Phi_{A,B}(V^tW)=AV^tW+V^tWB=(a+b)V^tW$, or $V^tW\neq 0$ donc V^tW est un vecteur propre de $\Phi_{A,B}$ associé à la valeur propre $a+b$.

4. (a) Raisonnons par récurrence sur $k\in\mathbb{N}$.
   Le résultat est évidemnt vrai pour $k=0$. NB $M^0=I_n \quad \forall M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Supposons maintenant $A^kY=Y(\lambda I_n-B)^k$ et montrons que $A^{k+1}Y=Y(\lambda I_n-B)^{k+1}$.
   On a d'abord $\Phi_{A,B}=\lambda Y$, donc $AY+YB=\lambda Y$ et on trouve $AY=Y(\lambda I_n-B)$. Donc $A^{k+1}Y=AA^kY=AY(\lambda I_n-B)^k=Y(\lambda I_n-B)^{k+1}$.

   (b) Soit un polynôme P, à coefficients dans $\mathbb{K}$, et de degré d, donc $P(X)=\sum_{k=0}^{d}a_kX^k$, et donc $P(A)Y=\sum_{k=0}^{d}a_kA^kY=\sum_{k=0}^{d}a_kY(\lambda I_n-B)^k=Y\sum_{k=0}^{d}a_k(\lambda I_n-B)^k=YP(\lambda I_n-B)$.

   (c) -D'aprés le théorème de *Cayley-Hamilton*, $P_A(A)=0$ donc $YP_A(\lambda I_n-B)=0$ notons $S=P_A(\lambda I_n-B))$ so S était inversible $YS=0 \implies YSS^{-1}=Y=0$ ce qui est impossible puisque Y est un vecteur propre, donc la matrice $P_A(\lambda I_n-B)$ n'est pas inversible .
   -Il est clair que si un produit de matrices n'est pas inversible alors l'une au moins des matrices intervenant dans ce produit n'est pas inversible.
   Or $P_A(\lambda I_n-B)=(-1)^n\prod_{\mu\in Sp_{\mathbb{K}}(A)}((\lambda-\mu)I_n-B)^{\beta_\mu}$ n'est pas inversible donc $\exists\mu\in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $((\lambda-\mu)I_n-B)^{\beta_\mu}$ n'est pas inversible et donc $\exists\mu\in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que $(\lambda-\mu)I_n-B$ n'est pas inversible .En prenant $a=\mu$ on peut en déduire qu'il existe $a\in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda-a)I_n-B$ ne soit pas inversible .

5. Si le polynôme P_A est scindé sur $\mathbb{K}$ alors :
   $\lambda\in Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) \implies \exists a\in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ tel que la matrice $(\lambda-a)I_n-B$ ne soit pas inversible c'est à dire $\det((\lambda-a)I_n-B)=0$ et donc $\lambda-a\in Sp_{\mathbb{K}}(B)$ donc $\exists b\in Sp_{\mathbb{K}}(B)$ tel que $\lambda-a=b$ d'où $\lambda=a+b$ or $a\in Sp_{\mathbb{K}}(A)$ d'où $\lambda\in Sp_{\mathbb{K}}(A)+Sp_{\mathbb{K}}(B)$ et on conclut que $Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B})\subset Sp_{\mathbb{K}}(A)+Sp_{\mathbb{K}}(B)$.

Inversement, d'aprés la question 3.b on voit que $Sp_{\mathbb{K}}(\Phi_{A,B}) \supset Sp_{\mathbb{K}}(A) + Sp_{\mathbb{K}}(B)$. D'où l'égalité.

6. Supposons que $\sum_{i=1}^{p} Y_i^t Z_i = 0$, on multiplie cette égalité à droite par un Z_j où $1 \leq j \leq n$ fixe, mais quelconque d'où $\sum_{i=1}^{p} a_i Y_i = 0$ où $a_i = ^t Z_i Zj$, or $(Y_1, \ldots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ donc les a_i sont tous nuls en particulier $a_j = ^t Z_j Z_j = \|Z_j\|_2 = 0$ et donc $Z_j = 0 \quad \forall 1 \leq j \leq n$.
La réciproques est bien evidente.

7. La famille $(U_i^t W_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ est formée par des vecteurs propres de $\Phi_{A,B}$, pour montrer que l'endomorphisme $\Phi_{A,B}$ est diagonalisable il suffit de montrer que c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ or il est de cardinal n^2 égal à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ il suffit donc de montrrer qu'elle est libre.
En effet $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} U_i^t W_j = 0 \implies \sum_{i=1}^{n} U_i^t Z_i = 0$ où $Z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} W_j$ d'aprés la question précédente $Z_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} W_j = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$ or $(W_j)_{1 \leq j \leq n})$ est aussi libre donc
$a_{i,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$.

8. (a) $\forall (M = (m_{i,j}), N, P) \in \mathcal{M}_n^3(\mathbb{R}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ on a : $< M + \lambda N, P >= \mathrm{Tr}(^t MP + \lambda^t NP) = \mathrm{Tr}(^t MP) + \lambda \mathrm{Tr}(^t NP) =< M, P > + \lambda < N, P >$.
   $< M, N >= \mathrm{Tr}(^t MN) = \mathrm{Tr}(^t(^t MN) = \mathrm{Tr}(^t NM) =< N, M >$.
   $< M, M > \mathrm{Tr}(^t MM) =$ la somme des termes diagonaux de la matrice $^t MM$ or ces termes diagonaux sont $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2$ d'où $< M, M >= \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}^2 \geq 0$.
   $< M, M >= 0 \implies \sum_{1 \leq i,j \leq n} m_{i,j}^2 = 0 \implies$ les $m_{i,j}$ sont tous nuls ce qui implique que $M = 0$ et ainsi les propriétes du produit scalaire sont tous verifiés.

   (b) Question de cours à la portée de tous .

   (c) Pour montrer alors que $\Phi_{A,B}$ est un endomorphisme autoadjoint de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <, >)$ il faut montrer que $< \Phi_{A,B}(X), Y >=< X, \Phi_{A,B}(Y) > quad \forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n^2(\mathbb{R})$, c'est à dire $< AX, Y > + < XB, Y >=< X, AY > + < X, YB >$, or $< AX, Y >= \mathrm{Tr}(^t X^t AY) = \mathrm{Tr}(^t XAY) =< X, AY >$ de même on montre que $< XB, Y >=< X, YB >$.

2^{eme} Partie

1. Soit λ valeur propre de S et X un vecteur propre associé, donc $SX = \lambda X$ d'où
$0 <^t XSX = \lambda \|X\|_2^2$ or $X \neq 0$ car vecteur propre donc $\|X\|_2^2 > 0$ d'où $\lambda > 0$.

2. les valeurs propres Φ_S sont de la forme $\lambda + \mu$ où λ, μ des valeurs propres de S donc strictement positifs, ainsi les valeurs propres Φ_S sont strictement positifs or Φ_S est diagonalisable dans une base orthogonale donc est Φ_S definie positif .

3. Supposons $\Phi_S(X)$ symétrique donc $t^X S + S^t X = SX + XS$ d'où
$\Phi_S(^t X - X) = (^t X - X)S + S(^t X - X) = 0$ or Φ_S inversible car définie positive donc $^t X - X$ et donc X symétrique.
La réciproque est bien plus facile.

4. (a) En prenant $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. on $a =^t XAX > 0$, en plus A définie positive donc $\det(A) = ac-b^2 > 0$.

(b) ${}^tUAU = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left((x + \frac{b}{a}y)^2 + y^2\frac{ac-b^2}{a^2}\right) > 0$ alors A est definie positive .

(c) $\Phi_A(X_\lambda) = \begin{pmatrix} 2a\lambda & (1+\lambda)b \\ (1+\lambda)b & 2c \end{pmatrix}$, $\det\Phi_A(X_\lambda) = -\lambda^2b^2 + \lambda(4ac - 2b^2) - b^2 \longrightarrow -\infty$ si $\lambda \longrightarrow +\infty$ donc $\det\Phi_A(X_\lambda) < 0$ à partir d'un certain rang et dans ce cas $\Phi_A(X_\lambda)$ ne peut pas être definie positive.

5. Parceque S diagonalisable dans une base orthogonale, puisque définie positive.

6. (a) $\Phi_D(Y) = DY + YD = P^{-1}SPP^{-1}XP + P^{-1}XPP^{-1}SP = P^{-1}\Phi_S(X)P = P^{-1}MP = N$.

D'autre part, tout calcul matriciel fait on trouve $DY + YD = (\lambda_i y_{i,j}\lambda_j)_{1\leq i,j\leq n}$ or $DY + YD = \Phi_D(Y) = N = (n_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ d'où l'égalité : $y_{i,j} = \dfrac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j}$.

(b) $P^{-1} =^t P$ car P matrice orthogonale donc $N =^t PMP$ d'où ${}^tN =^t P^tMP =^t PMP$ car M symétrique. En plus soit X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ on a ${}^tXNX =^t (PX)M(PX) > 0$ car M définie positive.

(c) - Le calcul matriciel montre que ${}^tUYU = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} u_i y_{i,j} u_j = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j} u_i u_j$.

- Soit $\alpha > 0$ et $0 < x < 1$ on a $\displaystyle\int_x^1 t^{\alpha-1}dt = \frac{1-x^\alpha}{\alpha} \longrightarrow \frac{1}{\alpha}$(finie) quand $x \longrightarrow 0^+$; ce qui montre que l'application $t \mapsto t^{\alpha-1}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$.

- Le calcul matriciel donne ${}^tU(s)NU(s) = \displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} s^{\lambda_i+\lambda_j-1} n_{i,j} u_i u_j$ est intégrable en tant que somme finie de fonctions intégrables les $\lambda_i + \lambda_j$ joueront le rôle de α dans la question précédente.

- $\displaystyle\int_0^1 {}^tU(s)NU(s) = \sum_{1\leq i,j\leq n} \frac{n_{i,j}}{\lambda_i + \lambda_j} u_i u_j =^t UYU$ or N symétrique définie positive donc ${}^tU(s)NU(s) > 0$ car $U(s) \neq 0$

en particulier $\displaystyle\int_0^1 {}^tU(s)NU(s) =^t UYU > 0$.

(d) On a $X = PY^tP$, soit U un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc ${}^tUXU =^t ({}^tPU)Y({}^tPU) > 0$ car la matrice Y est définie positive la matrice X est définie positive. D'autre part $M = \Phi_S(X)$ est symétrique donc X aussi d'aprés la question 3. de la 2ème partie.

3^{eme} Partie

1. (a) Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $X \in \text{Ker}\Phi_{A,-A} \Leftrightarrow AX = XA \Leftrightarrow (\mu_1 - \mu_2)c = (\mu_1 - \mu_2)b = 0$

$\Leftrightarrow b = c = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$; et donc $\dim\text{Ker}\Phi_{A,-A} = 2$.

(b) Soit $X = (x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, le calcul matriciel donne encore une fois

$AX = (\lambda_i x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $XA = (\lambda_j x_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, en particulier

$X \in \text{Ker}\Phi_{A,-A} \Leftrightarrow AX - XA = 0 \Leftrightarrow (\lambda_i - \lambda_j)x_{i,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$

$\Leftrightarrow x_{i,j} = 0 \quad \forall 1 \leq i, j \leq n$ tel que $i \neq j \Leftrightarrow X$ est une matrice diagonale, donc $\text{Ker}\Phi_{A,-A}$ est formé par les matrices diagonale et sa dimension est égale à n.

2. (a) Résultat trés classique .

   (b) Soit P une matrice inversible et D une matrice diagonale telle que $A = P^{-1}DP$, $X \in$Ker$\Phi_{A,-A} \Leftrightarrow AX = XA \Leftrightarrow P^{-1}DPX = XP^{-1}DP \Leftrightarrow DPXP^{-1} = PXP^{-1}D \Leftrightarrow PXP^{-1} \in$Ker$\Phi_{D,-D} \Leftrightarrow X^{-1}Ker\Phi_{D,-D}P$, d'où Ker$\Phi_{A,-A} = P^{-1}Ker\Phi_{D,-D}P$ est isomorphe à Ker$\Phi_{D,-D}$ à l'aide de l'ismorphisme $M \mapsto PMP^{-1}$ donc sont de même dimension or D diagonale donc dimKer$\Phi_{D,-D} = n$ d'où dimKer$\Phi_{A,-A} = n$ aussi .

3. (a) L'application $A \mapsto \Phi_{A,-A}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car linéaire définie un espace vectoriel de dimension finie.

   (b) L'application $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto \det\left((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq q}\right)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car somme et produit des applications $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto a_{i,j}$ qui sont continues car linéaires.

4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ donc trigonalisable, il existe donc Q inversible et $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$ triangulaire telles que $A = Q^{-1}TQ$ où λ_i un valeur propre de M qui se répétent q fois et $\varepsilon = \min\limits_{\lambda_j \neq \lambda_i} |\lambda_j - \lambda_i|$ il est clair que $\lambda_i + \varepsilon \neq \lambda_j$ donc en remplaçant dans T, λ_i par $\lambda_i + \varepsilon$ alors dans T la valeur propre λ_i ne va se répéter que $q-1$ fois, on répéte l'itération jusqu'à ce qu'elle ne se répéte plus. Et on fait pareil pour les autres valeurs propres et on obtient une matrice triangulaire T_ε dont toutes les valeurs propres sont deux à deux distinctes et qui en plus tend vers T quand ε tends vers 0 (quitte à diviser ε par n et tendre n vers $+\infty$). Ainsi T_ε est diagonalisable donc $Q^{-1}T_\varepsilon Q$ aussi, d'autre part $Q^{-1}T_\varepsilon Q \longrightarrow Q^{-1}TQ = A$, d'où la densité.

5. (a) Pour montrer que l'ensemble $O_r = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), rg(C) > r\}$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ il suffit de montrer que son complémentaire $\mathcal{F}_r = \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), rg(C) \leq r\}$ est un fermé de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
   Notons φ_q l'application $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \mapsto \det\left((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq q}\right)$. $C \in \mathcal{F}_r \Leftrightarrow \forall q \geq r \quad \varphi_q(C) = 0$ et donc $\mathcal{F}_r = \cup_{q=r}^{n} \{C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\varphi_q(C) = 0\}$ est ruénion finies d'ensembles fermés, car φ_q continue, donc fermé.

   (b) Si $(A_p)_p$ une suite de matrices éléments de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ avec $m \geq 2$, toutes de rang $s > 0$ convergeant vers une matrice A avec les notations de la question précédente $A_p \in \mathcal{F}_s \quad \forall p \in \mathbb{N}^*$ qui est fermé donc $A = \lim A_p \in \mathcal{F}_s$ .D'où le rang de A est inférieur ou égal à s .

6. Soit un matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et (A_p) une suite de matrice ayant n valeurs propres deux à deux distinctes, convergente vers A, (cette suite existe d'aprés la question 4.). d'autre part l'application $M \mapsto \Phi_{M,M}$ est continue donc $\Phi_{A_p,-A_p}$ converge vers $\Phi_{A,-A}$. Notons rg$(\Phi_{A_p,-A_p}) = s$ donc $s = n^2 -$ dimKer$(\Phi_{A_p,-A_p})$ (d'aprés la formule du rang), et d'aprés la question 2.b. dimKer$(\Phi_{A_p,-A_p}) = n$ donc rg$(\Phi_{A_p,-A_p}) = s = n^2 - n$ et enfin d'aprés la question 5.b. rg$(\Phi_{A,-A}) \geq n^2 - n$, en utilisant encore une fois la formule du rang, mais cette fois pour $\Phi_{A,-A}$ on obteint que la dimension du noyau de l'endomorphisme $\Phi_{A,-A}$ est supérieur ou égal à n .

FIN DU CORRIGÉ

FIN