Concours Communs Marocain - Session 2007

Corrigé de l'épreuve d'analyse

Étude des solutions de l'équation différentielles : $\forall\lambda \in \mathbb{R}^+,\ \ y'' + \frac{1}{x}y' - (1 + \frac{\lambda^2}{x^2})y = 0 \quad (\mathcal{F}_\lambda)$.

Corrigé par Mohamed TARQI

Partie I

1a. Notons que f la fonction $t \to t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,1]$ et $\lim_{t\to 0} t^{1-x}f(t) = 1$, donc f est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $1-x<1$ ou encore $x>0$.

1b. De même f est continue sur $[1,+\infty[$ et $f(t) = o(e^{\frac{-t}{2}})$, donc, d'après la règle de Riemann, f est intégrable sur $[1,+\infty[$ quel que soit x.

2. Si on pose $z = x+iy$, on a $|t^{z-1}e^{-t}| = t^{x-1}e^{-t} = f(t)$, donc la fonction $t \to t^{z-1}e^{-t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ si et seulement si $x = \mathrm{Re}(z) > 0$.

3a. Une une intégartion par parties nous donne, pour tout $a>0$:

$$\int_0^a t^{z-1}e^{-t}dt = \left[\frac{1}{z}t^z e^{-t}\right]_0^a + \frac{1}{z}\int_0^a t^z e^{-t}dt,$$

d'où, en faisant tendre a vers $+\infty$:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z}\Gamma(z+1).$$

3b. Si $\alpha > -1$ alors $\alpha+p+1 > 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et par conséquent $\Gamma(\alpha+p+1$ est bien définie. Le reste est immédiat par récurrence.

3c. La fonction f étant strictement positive sur $[0,a]$, quel que soit $a>0$, donc $\int_0^a f(t)dt > 0$ et comme la fonction $a \to \int_0^a f(t)dt$ est croissante alors $\Gamma(x) = \lim_{a\to+\infty}\int_0^a f(t)dt$ est strictement positive sur $]0,+\infty[$.

3d. On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$, et la relation $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ nous donne $\Gamma(n+1) = n!$.

4a. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) > 0$, on a :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt + \int_1^{+8} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

D'autre part, la formule de Taylor, avec reste intégrale, à l'ordre n appliquée à la fonction $x \to e^{-x}$ sur $[0,t]$ s'écrit :

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}t^k + \int_0^t (-1)^{n+1}e^{-u}\frac{(t-u)^n}{n!}du.$$

En effectuant dans l'intégrale le changement de variable $u = t(1-v)$, on obtient

$$e^{-t} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}t^k + (-1)^{n+1}e^{-t}\frac{t^{n+1}}{n!}\int_0^1 v^n e^{vt}dv.$$

D'où :

$$\int_0^1 t^{z-1}e^{-t}dt = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\int_0^1 t^{z+k-1} + r_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k} + r_n(z)$$

avec
$$r_n(z) = (-1)^{n+1}\frac{1}{n!}\int_0^1 e^{-t}t^{n+z}\left(\int_0^1 v^n e^{vt}dv\right)dt.$$
Or, pour tout $t \in [0,1]$ et tout $z = x+iy \in \mathbb{C}$,
$$0 \leq |e^{-t}t^{n+z}| = e^{-t}t^{n+x} < 1,\ \ 0 < \int_0^1 v^n e^{vt}dv < \int_0^1 edt.$$
On en déduit
$$|r_n(z)| < \frac{e}{n!},$$
et par conséquent :
$$\Gamma(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{1}{z+k} + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$
4b. Si z est un entier négatif ou nul la fonction considérée n'est pas définie. Dans le cas contraire, la fonction est la somme d'une série numérique absolument convergente d'après le règle de d'Alembert. Donc la fonction est définie sur $\mathbb{C}$ privé de l'ensemble des entiers négatifs ou nuls.
Montrons que la convergence est uniforme sur tout disque fermé D inclus dans $\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,...\}$, soit $[a,b]$ la projection de D sur l'axe des réels, cela se traduit par $0 < a < b$ ou $-(k+1) < a < b < -k$. En effet, pour $z \in D$, on a $x = Re(z) \in [a,b]$ et suivant le cas, pour tout n naturel ou pour tout n supérieur à k, nous avons
$$\left|(-1)^n\frac{1}{n!}\frac{1}{z+n}\right| \leq \frac{1}{n!}\frac{1}{a+n}$$
ce qui montre qu'il s'agit d'une convergence normale, et par suite, uniforme. Donc la fonction ainsi définie est continue sur $\mathbb{C}\backslash\{0,-1,-2,...\}$.
5a. La fonction $x \to t^{x-1} = e^{\ln(t)(x-1)}$ est décroissante sur $[0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$, d'où :
$$\max(t^{a-1},t^{b-1}) = \begin{cases} t^{a-1}, & \text{si } t \in]0,1] \\ t^{b-1}, & \text{si } t \in [1,+\infty[\end{cases}$$
5b. La fonction $x \to t^{x-1}$ étant continue, monotone sur $[a,b]$, donc on peut écrire :
$$0 \leq t^{x-1} \leq \sup_{x\in[a,b]} t^{x-1} = \max(t^{a-1},t^{b-1}).$$
5c. Soit $0 < a < 1 < b < +\infty$ et posons $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$ pour $(x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[$. La fonction $f : (x,t) \to f(x,t)$ est continue sur $[a,b]\times]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ et admet une dérivée partielle par rapport à x, $(x,t) \to \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\ln t)e^{-t}t^{x-1}$, continue sur $[a,b]\times]0,+\infty[$. Soit
$$\varphi(t) = \begin{cases} |\ln t|e^{-t}t^{a-1}, & \text{si } t \in]0,1] \\ (\ln t)e^{-t}t^{b-1}, & \text{si } t \in [1,+\infty[\end{cases}$$
Alors φ est continue par morceaux, intégrable sur $]0,+\infty[$ et on a
$$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,+\infty[,\ \ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$$
D'après le théorème de dérivation des intégrales dependant d'un paramètre, Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et $\forall x \in [a,b]$, $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$

Comme a et b sont quelconques, le résultat reste vraie sur la réunion des intervalles $[a,b]$, donc Γ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t) e^{-t} t^{x-1} dt.$$

5d. Soit $x > 0$, on a $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, on en déduit, par passage à la limite quand x tend vers 0, $\lim_{x \to 0} x\Gamma(x) = \lim_{x \to 0} \Gamma(x+1) = \Gamma(1) = 1$, donc $\Gamma(x) \simeq \frac{1}{x}$ au voisinage droite de 0.

Partie II

1. $y_\alpha = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$, en particulier sur $]0,R[$. Si y_α est solution de $(\mathcal{F}_\lambda)$, alors on aura nécessairement :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\alpha)(n+\alpha-1) x^{n+\alpha} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\alpha) x^{n+\alpha} - (x^2+\lambda^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\alpha} = 0,$$

il vient, après simplification par x^α et identification,

$$\begin{array}{rcl} (\alpha^2-\lambda^2)a_0 & = & 0 \\ ((1+\alpha)^2-\lambda^2)a_1 & = & 0 \\ ((n+\alpha)^2-\lambda^2)a_n & = & a_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \end{array}$$

et comme $a_0 \neq 0$, alors

$$\begin{array}{rcl} \alpha^2 & = & \lambda^2 \quad (i) \\ ((1+\alpha)^2-\lambda^2)a_1 & = & 0 \quad (ii) \\ ((n+\alpha)^2-\lambda^2)a_n & = & a_{n-2}, \quad \forall n \geq 2 \quad (iii). \end{array}$$

1a. Avec ces hypothèses on obtient $a_1 = 0$, puis la relation (iii) implique que $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$. La relation (iii) entraîne encore que $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p} = \frac{a_{2(p-1)}}{2^2 p(p+\alpha)} = \frac{a_0}{2^{2p} p!} \frac{1}{(p+\alpha)(p+\alpha-1)\ldots(\alpha+1)}$, relation qui s'écrit à l'aide de Γ

$$a_{2p} = \frac{a_0 \Gamma(\alpha+1)}{2^{2p}\Gamma(\alpha+p+1)}.$$

1b. Posons $u_p = a_{2p} z^{2p}$, alors

$$\lim_{p \to \infty} \frac{|u_{p+1}|}{|u_p|} = \lim_{p \to \infty} |z|^2 \frac{\Gamma(\alpha+p+1)}{2^2(p+1)\Gamma(\alpha+p+2)} = \lim_{p \to \infty} |z^2| \frac{1}{2^2(p+1)(\alpha+p+1)} = 0,$$

donc le rayon de convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est infini.

1c. Dans ce cas $a_0 = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)}$ et pour tout $x > 0$ (puisque $R = \infty$), on aura :

$$y_\lambda(x) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda+1)} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{2^{2p} p! \Gamma(\lambda+p+1)} x^{2p+\lambda} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!\Gamma(\lambda+p+1)} (\frac{x}{2})^{2p+\lambda}.$$

D'autre part

$$y_\lambda(x) = (\frac{x}{2})^\lambda \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!\Gamma(\lambda+p+1)} (\frac{x}{2})^{2p+\lambda},$$

et comme y_λ étant continue en $0(\lambda \geq 0)$, alors $y_\lambda(x) \sim_0 (\frac{x}{2})^\lambda \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}$.

3. Dans cette question on suppose que $2\lambda \notin \mathbb{N}$.

3a. Avec cette condition $(-\lambda+n)^2 - \lambda^2 \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors, comme dans la question 2a. de cette partie, on trouve $\forall p \in \mathbb{N}$, $a_{2p+1} = 0$ et $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$a_{2p} = \frac{a_{2(p-1)}}{2^2 p(p+\alpha)} = \frac{a_0}{2^{2p}p!} \frac{1}{(p+\alpha)(p+\alpha-1)...(\alpha+1)} = \frac{a_0 \Gamma(\alpha+1)}{2^{2p}\Gamma(\alpha+p+1)}.$$

On a $\Gamma(-\lambda+1) \neq 0$, donc $a_0 = \frac{1}{2^{-\lambda}\Gamma(-\lambda+1)}$, on obtient alors que l'application

$$x \to \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!\Gamma(-\lambda+p+1)} (\frac{x}{2})^{2p-\lambda}.$$

est aussi solution de $(\mathcal{F}_\lambda)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

3b. Il est clair que l'espace de solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{F}_\lambda)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est un espace vectoriel de dimension 2, puisque il s'agit d'une équation différentielle linéaire de second degré à coefficients continues sur et ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}_+^*$(résultat de cours).
D'autre part les deux applications y_λ et $y_{-\lambda}$ ne sont pas proportionnelles, puisque $y_\lambda(x) \sim_0 (\frac{x}{2})^\lambda \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}$ et $y_{-\lambda}(x) \sim_0 (\frac{x}{2})^{-\lambda} \frac{1}{\Gamma(-\lambda+1)}$ (les deux applications ont des limites différentes en 0). Donc la famille $\{y_\lambda, y_{-\lambda}\}$ est libre et par conséquent toute solution de $(\mathcal{F}_\lambda)$ est combinaison linéaire de y_λ et $y_{-\lambda}$.

Partie III

1a. Dans ces conditions $\alpha + 2k \neq 0$ pour tout $k \geq 1$. La relation est vraie pour $p = 1$; n'est autre que la relation (1) pour $p = 1$, puis par une récurrence simple on obtient, pour $p \geq 1$,

$$\alpha_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2}.$$

1b. La dérivée de a_{2p} est donnée par :

$$a'_{2p}(\alpha) = \sum_{i=1}^{p} \prod_{k \neq i}^{p} \frac{1}{(\alpha+2k)^2} \frac{-2}{(\alpha+2i)^3} = a_{2p}(\alpha) \sum_{k=1}^{p} \frac{-2}{(\alpha+2k)}.$$

On obtient facilement, en 0, $a'_{2p}(0) = b_p = \frac{-1}{(2^p p!)^2} H_p$.

1c. On sait que $H_p \sim_\infty \ln p$, puis par application de la règle de d'Alembert, on obtient

$$\lim_{p\to\infty} \frac{b_{p+1} z^{2(p+1)}}{b_p z^{2p}} = 0,$$

donc la série $\sum\limits_{p=1}^{\infty} b_p z^{2p}$ est partout convergente, donc son rayon de convergence est infini.

2a. Par dérivation de la relation de (1), on obtient, pour tout $\alpha \geq 1$,

$$a'_{2p}(\alpha)(\alpha+2p)^2 + 2a_{2p}(\alpha+2p) = a'_{2(p-1)}(\alpha).$$

Pour $\alpha = 0$, on obtient exactement la relation demandée.
2b. La fonction z_0 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et par dérivation on obtient :

$$\begin{aligned}
x^2 z_0''(x) + x z_0'(x) - x^2 z_0(x) &= x^2 \left[y_0''(x) \ln x + 2y_0'(x)\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} y_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} 2p(2p-1) b_p x^{2p-2} \right] \\
&+ x y_0'(x) \ln x + y_0(x) + \sum_{p=1}^{\infty} 2p b_p x^{2p} - x^2 y_0(x) \ln x - \sum b_p x^{2p+2} \\
&= \left[x^2 y_0''(x) + x y_0'(x) - x^2 y_0(x) \right] \ln x + 2x y_0'(x) + \sum_{p=1}^{\infty} \left[2p(2p-1) + 2p b_p \right] x^{2p} \\
&- \sum_{p=1}^{\infty} b_p x^{2p+2} \\
&= 2x \sum_{p=0}^{\infty} \frac{2p}{(2^p p!)^2 x^{2p-1}} + \sum_{p=1}^{\infty} 4p^2 x^{2p} - \sum_{p=2}^{\infty} b_{p-1} x^{2p} \\
&= \sum_{p=1}^{\infty} (4p a_{2p}(0) + 4p^2 b_p - b_{p-1}) x^{2p} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

donc z_0 est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{F}_0)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2b. La famille $\{y_0, z_0\}$ est libre puisque y_0 est continue en 0, alors que $\lim_{x \to 0} z_0(x) = -\infty$, donc, pour la même raison que la question **3b.** de la partie II, cette famille engendre l'espace des solutions de l'équation $(\mathcal{F}_0)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
B- Étude de $(\mathcal{F}_1)$
1a. Comme dans la partie A, par une récurrence simple on obtient $c_{2p}(\alpha) = \prod_{k=1}^{p} \frac{1}{(\alpha + 2k)^2 - 1}$.
1b. Par dérivation puis considération de la valeur de α en 0, on obtient la formule cherchée.
1c. De même ici, on trouve $R = \infty$.
2a. Il suffit de dériver la relation (2) par rapport à la variable α, puis de prendre $\alpha = 1$.
2b. La fonction u_1 est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, d'après les calculs,

$$\begin{aligned}
x^2 u_1''(x) + x u_1'(x) - (1+x)^2 u_1(x) &= \sum_{p=1}^{\infty} \left[\left((2p+1)^2 - 1 \right) d_p + 2(1+2p) c_{2p}(1) - d_{p-1} \right] x^{2p+1} + 2x \\
&= 2x,
\end{aligned}$$

ou encore

$$u_1''(x) + \frac{1}{x} u_1'(x) - (1 + \frac{1}{x^2}) u_1(x) = 2x,$$

donc u_1 est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3a. v_1 s'écrit sous la forme : $v_1(x) = \frac{e_0}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} e_n x^{n-1}$. Soit R la rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} e_n x^{n-1}$. Donc v_1 est solution de F_1 sur $]0, R[$ si et seulement si

$$-e_1 - (e_0 + 2) + \sum_{n=3}^{\infty} \left[n(n-2) e_n - e_{n-1} \right] x^{n-1} = 0.$$

On obtient les relations :

$$\begin{aligned}
e_0 &= -2; \\
e_1 &= 0; \\
n(n-2) e_n - e_{n-2} &= 0, \ \forall n \geq 3.
\end{aligned}$$

Ce qui permet de déduire que $e_{2p} = \dfrac{e_0}{2^{2p}(p+1)!} = -2c_{2p}(1)$ et $e_{2p+1} = 0$ pour $p \in \mathbb{N}$. Ces relations montrent que $R = \infty$ et finalement v_1 est solution de $\mathcal{E}_1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3b. z_1 est la différence de deux solutions de $(\mathcal{E}_1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc est solution de $(\mathcal{F}_1)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en effet, $(\mathcal{F}_1)$ est l'équation homogène associée à l'équation $(\mathcal{E}_1)$.
4. L'étude de comportement de y_1 et z_1 au voisinage droite en 0, montre que ces deux fonctions ne sont pas proportionnelles, donc libres et par conséquent elles forment une base pour l'espace des solutions de l'équation différentielles $(\mathcal{F}_1)$ sur $\mathbb{R}_*^+$.

• • • • • • • • • • • • •

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr