Concours National Commun - Session 2012

Corrigé de l'épreuve de mathématiques II
Filière MP

Résultat les matrices : Pour tout polynôme de degré $n \geq 2$ à coefficients dans $\mathbb{K}(\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$ et toute matrice $N \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ dont le polynôme minimal est de degré $n-1$, il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que N soit une sous-matrice de M et que le polynôme caractéristique de M soit égal à $(-1)^n P$. (résultat dû à FARHAT *et* LEDERMAN *en 1958).*

Corrigé par M.TARQI

PARIE I. UNE FONCTION DÉFINIE PAR UNE INTÉGRALE

1.1 1.1.1 $\begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & w \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ si et seulement si $Bw = v$ et ${}^t uw + \lambda = b$ ou encore si et seulement si $\begin{cases} w = B^{-1}v \\ \lambda = b -{}^t uB^{-1}v \end{cases}$, car B est inversible.

1.1.2 Il est clair que $\begin{vmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{vmatrix} = \det(B) \times 1 = \det(B)$.

1.1.3 Puisque B est inversible, alors $\det(B) \neq 0$ et donc $B^{-1} = \dfrac{1}{\det(B)} {}^t\widetilde{B}$.

1.1.4 D'après la question 1.1.1, on a : $\begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix} \left(= \begin{matrix} B & v \\ {}^t u & 1 \end{matrix} \right) \begin{pmatrix} I_n & w \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{vmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B & 0 \\ {}^t u & 1 \end{vmatrix} . \begin{vmatrix} I_n & w \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = |B| \times \lambda = |B| \left(b - \frac{1}{|B|} {}^t u {}^t\widetilde{B} v \right) = b|B| -{}^t u {}^t\widetilde{B} v.$$

1.2

1.2.1 Soit $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_r$ les différentes valeurs propres complexes non nulles de B et $\varepsilon = \min\limits_{i \in [\![1,r]\!]} |\lambda_i|$. Alors pour tout $x \in]0, \varepsilon[$, x n'est pas une valeur propre de B et donc $B - xI_n$ est inversible.

1.2.2 L'application $A \longmapsto{}^t A$ est linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie, donc elle est continue.
Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Pour tout matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ on désigne par $A_1, A_2, ..., A_n$ les vecteurs colones de A. L'application $A \longmapsto |A|$ est la composée des applications :
- $A \longmapsto (A_1, A_2, ..., A_n)$ qui est linéaire, donc continue,
- et $(x_1, x_2, ..., x_n) \longmapsto \det_{\mathscr{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)$, qui est n-linéaire, donc continue.

Ainsi l'application $A \longmapsto |A|$ est continue.

1.2.3 Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, d'après la question 1.2.1, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in]0, \varepsilon[$, la matrice $B_x = B - xI_n$ est inversible et d'après la question 1.1.4, on a :

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} B_x & v \\ {}^t u & b \end{vmatrix} = b|B_x| -{}^t u\widetilde{B_x}v.$$

et par continuité des applications précédentes et comme $\lim_{x\to 0} B_x = B$, alors le passage à la limite dans l'égalité (1) donne :

$$\begin{vmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{vmatrix} = b|B| -^t u\widetilde{B}v.$$

Ceci montre que la formule (1) est valable pour toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

PARIE II. RÉUNION DE SOUS-ESPACES VECTORIELS

2.1 Supposons $F_1 \nsubseteq E$ et $F_2 \nsubseteq E$. Donc il existe $x_1 \in E \backslash F_1$ et $x_2 \in E \backslash F_2$, on a $x_1 + x_2 \in E = F_1 \cup F_2$, donc $x_1 + x_2 \in F_1$ ou $x_1 + x_2 \in F_2$. Si $x_1 + x_2 \in F_1$ et comme $x_2 \in F_1$ alors $x_1 + x_2 - x_2 = x_1 \in F_1$ ce qui est absurde. De même la condition $x_1 + x_2 \in F_2$ conduit à une contradiction.
En conclusion, si $E = F_1 \cup F_2$, alors nécessairement $E = F_1$ ou bien $E = F_2$.

2.2

2.2.1 On a $x \in E = F \cup F_r$ et $x \notin F$, donc $x \in F_r$. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y + \lambda x \in F_r$, alors $y + \lambda x - \lambda x = y \in F_r$ ce qui est absurde, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $y + \lambda x \notin F_r$.

2.2.2 Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $y + \lambda x \in E = F \cup F_r$ et $y + \lambda x \notin F_r$, donc $y + \lambda x \in F$. Considérons la droite affine $D = y + \mathbb{K}x$, montrons qu'il existe $i \in [\![1, r-1]\!]$ tel que $D \cap F_k$ contient au moins deux éléments différents, en effet, supposons que, pour tout $i \in [\![1, r-1]\!]$, il existe $x_i \in E$ tel que $D \cap F_i \subset \{x_i\}$, donc

$$D = \bigcup_{i\in[\![1,r-1]\!]} (D \cap F_i) \subset \bigcup_{i\in[\![1,r-1]\!]} \{x_i\}.$$

Ceci est absurde, puisque D est un ensemble infini. Ainsi il existe $k \in [\![1, r-1]\!]$ et deux scalaires α et β différents tels que $y + \alpha x \in F_k$ et $y + \beta x \in F_k$.

2.2.3 D'après la question précédente, $(\alpha - \beta)x \in F_k \subset F$ et comme $\alpha - \beta \neq 0$, $x \in F$ ce qui est absurde.

2.3 D'après la question 2.2 $E = F_r$ ou bien $E = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_{r-1}$. Si $E = E_r$ la propriété est démontrée sinon $E = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_{r-1}$ et le raisonnement de la question 2.2, montre qu'on a nécessairement $E = F_{r-1}$ ou bien $E = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_{r-2}$, ce procédé se poursuit, à la dernière étape on aura $E = F_1 \cup F_2$ et la question 2.1 montre que $E = F_1$ ou $E = F_2$. En conclusion, au moins l'un des indices $i \in [\![1, r]\!]$ vérifie $E = F_i$.

PARIE III. A PROPS DU DU POLYNÔME MINIMAL D'UNE MATRICE

3.1 D'après le théorème de Cayly-Hamilton toute matrice A est zéros de son polynôme caractéristique, et comme le polynôme minimal de A divise tout polynôme annulateur de A, π_A divise χ_A, ce dernier est de degré $\leq n$, donc $\deg \pi_A \leq n$.

3.2 Si $\deg \pi_A = n$, alors toute relation de la forme $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i A^i = 0$, conduit à $\alpha_i = 0$ pour tout i, sinon on aura un polynôme non nul et de degré $\leq n-1$, annulateur de A ce qui contredit la définition de π_A.

Si la famille $\{I_n, A, ..., A^{n-1}\}$ est libre, alors toute sous-famille de type $\{I_n, A, ..., A^k\}$ $(k \leq n-1)$ est libre, et donc on peut trouver un polynôme non nul de degré $\leq n-1$ tel que $P(A) = 0$, autrement dit $\deg \pi_A \geq n$, et en tenant compte de la question 3.1, $\deg \pi_A = n$.

3.3

3.3.1 $I_{A,v}$ est une partie non vide de $\mathbb{K}[X]$, elle contient par exemple le polynôme minimal de A. Si $P, Q \in I_{A,v}$, $(P-Q)(A)v = P(A)v - Q(A)v = 0$ et donc $P - Q \in I_{A,v}$, de même si $P \in I_{A,v}$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$, $QP \in I_{A,v}$. Donc $I_{A,v}$ est un idéal non réduit à $\{0\}$, donc il existe un unique polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ engendrant $I_{A,v}$.

3.3.2 Puisque $\pi_A \in I_{A,v}$ alors $\pi_{A,v}$ divise π_A. L'ensemble de diviseurs de π_A étant fini, et comme pour tout $n \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\pi_{A,v}$ divise π_A, alors l'ensemble

$$\{\pi_{A,w} \ / \ w \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$$

est fini. Donc on peut poser :

$$\{\pi_{A,w} \ / \ w \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\} = \{\pi_{A,v_1}, \pi_{A,v_2}, ..., \pi_{A,v_r}\}.$$

3.3.3 Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $F_k = \ker(\pi_{A,v_k}(A))$, donc F_k est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $v \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $i \in [\![1, r]\!]$ tel que $\pi_{A,v} = \pi_{A,v_i}$, donc $v \in F_i$, d'où :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_r.$$

3.3.4 D'après la deuxième partie, il existe $k \in [\![1, r]\!]$ tel que $\mathscr{M}_n(\mathbb{K}) = F_k$. Ainsi pour tout $v \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $\pi_{A,v_k}(A)(v) = 0$ et donc $\pi_{A,v_k}(A) = 0$ et par conséquent π_A divise π_{A,v_k}, et d'après la question 3.3.2, $\pi_{A,v_k} = \pi_A$.

Le vecteur $w = v_k$ répond à la question.

3.4 Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $e = e_1$. On a $(A^3 - cA^2 - bA - cI_3)(e) = 0$, donc $X^3 - cX^2 - bX - c \in I_{A,e}$, donc π_A divise $X^3 - cX^2 - bX - c$.

Supposons que le polynôme de A est de degré ≤ 2, donc il existe α, β et γ de $\mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2 = 0$, en particulier

$$(\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2)(e) = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0,$$

ceci entraîne $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ce qui est absurde. Donc $\deg \pi_A = 3$, donc forcément $\pi_A = X^3 - cX^2 - bX - a$. Le vecteur e convient.

3.5

3.5.1 D'après la question 3.3, il existe un vecteur $v \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $\pi_A = \pi_{A,v}$. Montrons que $(v, Av, ..., A^{n-1}v)$ est une base de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, en effet, soit $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}$ tels que $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_i A^i v = 0$, donc le polynôme $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_i X^i$ de degré $\leq n-1$ est dans $I_{A,v}$, donc $\deg \pi_A \leq n-1$ ce qui est absurde, donc la famille $(v, Av, ..., A^{n-1}v)$ est bien libre.

Ceci montre que la matrice B dont les colones sont $v, Av, ..., A^{n-1}v$ est inversible, est donc pour chaque $x \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique $u \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que ${}^tBu =^t x$, égalité qui s'écrit encore sous forme :

$$x =^t uB = ({}^tuv, {}^tuAv, ..., {}^tuA^{n-1}v).$$

3.5.2 D'après la question 3.2, il suffit de montrer que la famille $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est libre. Soit $x = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$(3) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_i A^i = 0.$$

Pour ce choix de x, il existe $(u, v) \in (\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))^2$ tel que $\overline{x} = ({}^t uv, {}^t uAv, ..., {}^t uA^{n-1}v)$. La relation (3) entraîne, en multipliant à gauche par ${}^t u$ et à droite par v,

$$(4) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_i^t uA^i v = 0$$

la relation (4) s'écrit encore sous la forme $\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_i|^2 = 0$, donc tous les α_i sont nuls, ainsi $(I_n, A, ..., A^{n-1})$ est bien libre.

Parie IV. Démonstration du résultat proposée

4.1 Si A répond à la question, l'égalité $A = \begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix}$ entraîne $\operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B + b$. Or $\operatorname{Tr} A = -c_1$ et $\operatorname{Tr} B = -\alpha_1$, donc $b = \operatorname{Tr} A - \operatorname{Tr} B = \alpha_1 - c_1$.

4.2

4.2.1 On a, pour tout $p \in [\![0, n-2]\!]$, $\deg U_p = n - 2 - p$ car $\alpha_0 \neq 0$, donc la famille $(U_0, U_1, ..., U_{n-2})$ est une famille de polynômes de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$ de degrés échelonnés, donc elle forme une base de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$.

4.2.2 $(U_0, U_1, ..., U_{n-2})$ étant une base de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$, donc pour chaque $Q \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$, il existe $x = (x_0, x_1, ..., x_{n-2}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ tel que

$$Q = \sum_{k=0}^{n-2} x_k U_k.$$

Mais $x \in \mathbb{K}^{n-1}$ peut s'écrire sous la forme $x = ({}^t yz, {}^t yBz, ..., {}^t yB^{n-2}z)$ avec $(y, z) \in (\mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{K}))^2$, donc

$$Q = \sum_{k=0}^{n-2} {}^t yB^k z U_k.$$

4.3 **Expression d'une matrice**

4.3.1 Soit $(x,\lambda)\in \mathbb{K}^2$, on a :

$$\begin{aligned}
\chi_B(x)-\chi_A(\lambda) &= (-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-2}\alpha_k\left(x^{n-1-k}-\lambda^{n-1-k}\right)\\
&= (-1)^{n-1}(x-\lambda)\sum_{k=0}^{n-2}\alpha_k\left(\sum_{p=0}^{n-2-k}x^{n-2-k-p}\lambda^p\right)\\
&= (-1)^{n-1}(x-\lambda)\sum_{p=0}^{n-2}\left(\sum_{k=0}^{n-2-p}\alpha_k x^{n-2-k-p}\right)\lambda^p\\
&= (-1)^{n-1}(x-\lambda)\sum_{p=0}^{n-2}U_p(x)\lambda^p
\end{aligned}$$

4.3.2 Substituions B à λ dans l'égalité précédente, donc on obtient, grâce au théorème de Cayly-Hamilton :

$$\chi_B(x)I_{n-1}-\chi_B(B)=(-1)^{n-1}(xI_{n-1}-B)\sum_{p=0}^{n-2}U_p(x)B^p,$$

ou encore

$$\chi_B(x)I_{n-1}=(-1)^n(B-xI_{n-1})\sum_{p=0}^{n-2}U_p(x)B^p.$$

4.3.3 Pour tout $x\in\mathbb{K}$, on a $|B-xI_{n-1}|I_{n-1}=(-1)^n(B-xI_{n-1})\sum_{p=0}^{n-2}U_p(x)B^p$, et par définition $|B-xI_{n-1}|I_{n-1}=(B-xI_{n-1})^t(\widetilde{B-xI_{n-1}})$ donc

$$(B-xI_{n-1})\left[{}^t(\widetilde{B-xI_{n-1}})-(-1)^n\sum_{p=0}^{n-2}U_p(x)B^p\right]=0.$$

L'ensemble des valeurs propres de B étant fini, donc pour tout $x\notin \mathrm{Sp}(B)$,

$${}^t(\widetilde{B-xI_{n-1}})=(-1)^n\sum_{p=0}^{n-2}U_p(x)B^p.$$

Il est clair que les coefficients de la matrice ${}^t(\widetilde{B-xI_{n-1}})$ sont des polynômes en x, en travaillant coefficient par coefficient, on peut dire que les coefficients de même indice, qui coincident sur $\mathbb{K}\backslash\mathrm{Sp}(B)$, coincident sur $\mathbb{K}$, ainsi :

$$\forall x\in\mathbb{K},\quad {}^t(\widetilde{B-xI_{n-1}})=(-1)^n\sum_{p=0}^{n-2}U_p(x)B^p.$$

4.4 Résolution du problème

4.4.1 Soit $x\in\mathbb{K}$, on a : $A-xI_n=\begin{pmatrix} B-xI_{n-1} & v\\ {}^tu & b-x\end{pmatrix}$, donc

$$\chi_A(x)=|A-xI_n|=(b-x)\chi_b(x)-{}^t u{}^t(\widetilde{B-xI_{n-1}})v.$$

Mais $\chi_B(x) = (-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k x^{n-1-k}$ et ${}^t(\widetilde{B - xI_{n-1}}) = (-1)^n\sum_{p=0}^{n-2}U_p(x)B^p$, d'où :

$$\begin{aligned}
\chi_A(x) &= (b-x)\chi_b(x) -^t u^t(\widetilde{B-xI_{n-1}})v \\
&= (b-x)(-1)^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k x^{n-1-k} - (-1)^n\sum_{p=0}^{n-2}U_p(x)^t uB^p v \\
&= (-1)^n(x-b)(x^{n-1}+\alpha_1 x^{n-2}+\sum_{k=2}^{n-1}\alpha_k x^{n-1-k}) - (-1)^n\sum_{p=0}^{n-2}U_p(x)^t uB^p v \\
&= (-1)^n(x-b)\left(x^{n-1}+\alpha_1 x^{n-2}+\sum_{k=2}^{n-1}\alpha_k x^{n-1-k}\right) - (-1)^n\sum_{p=0}^{n-2}U_p(x)^t uB^p v \\
&= (-1)^n\left(x^n+(\alpha_1-b)x^{n-1}+H(x)\right) - (-1)^n\sum_{p=0}^{n-2}U_p(x)^t uB^p v,
\end{aligned}$$

où $H(x) = (x-b)\sum_{k=2}^{n-2}\alpha_k x^{n-1-k}$. On a bien $H \in \mathbb{K}_{n-2}[X]$ et ne depend que b et de χ_B.

4.4.2 Par identification, $\chi_A = (-1)^n P$ si et seulement si $\alpha_1 - b = c_1$ ce qui est vérifié et, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $(-1)^n H(x) - (-1)^n\sum_{p=2}^{n-2}U_p(x)^t uB^p v = (-1)^n\sum_{k=2}^{n}c_k x^{n-k}$ ou encore si et seulement si $H - \sum_{k=2}^{n-2}c_k X^{n-k} = \sum_{p=2}^{n-2}{}^t uB^p vU_p$.

4.4.3 Le polynôme $H - \sum_{k=2}^{n-2}c_k X^{n-k}$ de $\mathbb{K}_{n-2}[X]$ permet de définir deux vecteurs u et v tels que $H - \sum_{k=2}^{n-2}c_k X^{n-k} = \sum_{p=2}^{n-2}{}^t uB^p vU_p$ (la question 4.2.2), pour ces deux vecteurs u et v le polynôme caractéristique $\begin{pmatrix} B & v \\ {}^t u & b \end{pmatrix}$ est bien $(-1)^n P$.

$$(\widetilde{B - xI_{n-1}}) = (-1)^n\sum_{p=0}^{n-2}U_p(x)B^p.$$

•••••••••••••