التمرين الأول : (6 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3-u_n} & (n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1) أ- تحقق أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = -1 + \dfrac{3}{3-u_n}$ — 0,25

ب- بين بالترجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $0 < u_n < 2$ — 1,25

ج- تحقق أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(u_n-2)}{3-u_n}$ — 0,75

واستنتج أن المتتالية $(u_n)_n$ متناقصة. — 1

2) نضع لكل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n}$

أ- بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها 3 محدداً حدها الأول — 1

ب- تحقق أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{2}{1-v_n}$ — 0,25

ج- أكتب v_n بدلالة n واستنتج أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{2}{1+3^n}$ — 1

د- احسب (معللا جوابك) نهاية المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$. — 0,5

التمرين الثاني : (3,5 ن)

نعتبر التكاملات التالية : $I = \int_0^1 \dfrac{x}{1+x^2}\,dx$; $J = \int_0^1 \dfrac{x^3}{1+x^2}\,dx$; $K = \int_0^1 x\ln(1+x^2)\,dx$

1) بين أن $I = \frac{1}{2}\ln 2$ — 1

2) أ- تحقق أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\dfrac{x^3}{1+x^2} = x - \dfrac{x}{1+x^2}$ — 0,25

ب- استنتج قيمة التكامل J — 1

3) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن : $K = \ln 2 - \frac{1}{2}$ — 1,25

التمرين الثالث : (10,50 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = xe^x + 1 - x$

وليكن (C) منحناها الممثل في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ $(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm)$

1) أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=-x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $-\infty$. — 1

ب- ادرس الوضع النسبي لـ (C) و (Δ) على المجال $]-\infty,0]$ — 0,5

ج- احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ (علل أجوبتك) ثم أول هندسيا النتيجة الأخيرة. — 1,5

2) أ- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^x - 1 + xe^x$ — 0,75

ب- بين أن الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}^+$ وتناقصية على $\mathbb{R}^-$ — 1

ثم ضع جدول تغيراتها على $\mathbb{R}$ محدداً $f'(0)$ و $f(0)$ — 0,5

3) أ- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $f''(x) = (x+2)e^x$ — 0,75

ب- ادرس تقعر المنحنى (C) محددا زوج إحداثيتي نقطة انعطاف (C). — 1

ج- أنشئ المنحنى (C) — 1,5

4) أ- بين أن الدالة $F : x \longmapsto F(x) = (x-1)e^x - \frac{x^2}{2} + x$; أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ — 1

ب- احسب ب cm^2 مساحة الحيز المحصور بين (C) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$; $x=1$. — 1