التمرين الاول : (9 نقطة)

لتكن g_n الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g_n(x)=x-n+\frac{n}{2}\ln x$ ، $n\in\mathbb{N}^*$

1) أ حسب $\lim_{x\to+\infty} g_n(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} g_n(x)$

2) أ حسب $g_n'(x)$ و اعط جدول تغيرات الدالة g_n

3) أ) بين أن المعادلة $g_n(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $]0,+\infty[$ وأن $1<\alpha_n<e^2$

ب) بين أن (α_n) متتالية تزايدية قطعا

ج) بين أن : $\ln\alpha_n=2-\frac{2}{n}\alpha_n$

د) بين أن (α_n) متقاربة وأحسب $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n$

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=\frac{2x-\ln x}{2\sqrt{x}}$

1) أ حسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

2) أ) بين أن $f'(x)=\frac{g_1(x)}{2x\sqrt{x}}$ لكل x من $]0,+\infty[$

ب) أعط جدول تغيرات الدالة f

3) أدرس الفروع اللانهائية ل (Cf) بجوار $+\infty$

4) بين أن $f(\alpha_1)=\frac{2\alpha_1-1}{\sqrt{\alpha_1}}$ وأنشيء (Cf) في معلم ممنظم متعامد (O , i , j)

التمرين الثاني : (2 نقطة)

لتكن f_n الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f_n(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+....+(-1)^n\frac{x^n}{n}$

وليكن (Cf_n) منحنى الدالة f_n في معلم ممنظم متعامد (O , i , j)

1) بين أن لكل x من Df_n : $f_n'(x)=\frac{(-x)^n}{1+x}$

2) بين أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x^n}=\frac{(-1)^n}{n}$

التمرين 3 (2 نقطة)

نضع : $u_1=1$, $u_n=\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n}k$ $n\geq 2$

1) باستعمال مبرهنة TAF للدالة : $F: x\mapsto\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$

والمجال $[k,k+1]$ حيث $k\in\{1,2,...,n\}$

بين أن

$$u_n-\frac{1}{n}<\frac{2}{3}-\frac{2}{3n\sqrt{n}}<u_n-\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

$\forall n\in\mathbb{N}^*$

2) واستنتج $\lim u_n$.

تمرين 4 (7 نقط)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right) & : x>0\\ 0 & : x=0\end{cases}$$

1- حدد D_f واحسب $\lim\limits_{+\infty} f(x)$

2- ادرس اتصال و قابلية اشتقاق f على يمين 0

3- a) باستعمال TAF بين انه لكل $x>0$

$$0<\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}<x^3$$

b) استنتج ان $0<f(x)-x+1<\dfrac{4}{x}$ $\forall x>0$

c) حدد الفرع اللانهائي ل C_f بجوار $+\infty$

4- نضع لكل $x>0$ $g(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)-\dfrac{1}{x+2}$

ادرس تغيرات الدالة g واستنتج اشارتها

5- ادرس تغيرات الدالة f

6- انشئ المنحنى (C_f)

7- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 1}$:

$$u_n=-\frac{3n^2+n-2}{2}+\sum_{k=n}^{2n} f(k)$$

a- تحقق أن $u_n=\sum\limits_{k=n}^{2n}\left(f(k)-k+1\right)$ $n\geq 1$

b- استنتج ان $0<u_n<4\sum\limits_{k=n}^{2n}\dfrac{1}{k}$

d- نضع $v_n=\sum\limits_{k=n}^{2n}\dfrac{1}{k}$ مع $n\in\mathbb{N}^*$

بين ان $\dfrac{1}{k+1}<\ln(k+1)-\ln(k)<\dfrac{1}{k}$

استنتج $\lim v_n$

c- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ مكبورة.

Hors Barème 2 ن

احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{n}$