Série Oscillateurs

Exercice 1

Un solide S de centre d'inertie G, de masse m = 0,1 kg, fixé à un ressort de raideur k = 10 $N.m^{-1}$ coulisse sur une tige horizontale. On désigne par x (t) la position de G dans le repère $(O, \vec{i})$ à l'instant t, O étant la position de G à l'équilibre.
On écarte S de sa position d'équilibre et on le lâche en lui donnant une vitesse initiale. L'unité de longueur est le mètre et l'unité de temps est la seconde ; on donne x(0) = 0,05m et $\dot{x}(0) = -0{,}5ms^{-1}$.
1) On néglige les frottements. On dit que S est un oscillateur mécanique libre non amorti.
a) Démontrer que l'équation horaire du mouvement de G est de la forme : $x(t) = X_{max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$.
b) Calculer X_{max}, ω_0, φ et la période T_0 du mouvement.
c) Calculer la position et la vitesse de S à l'instant t = 5 s.
d) tracer la courbe représentative (C) de l'élongation du mouvement de G.
2) Le mouvement de S est amorti par des frottements dont la force est proportionnelle à la vitesse du mobile, le coefficient de proportionnalité f de cette force étant tel que $f^2 < 4mk$. On dit que S est un oscillateur mécanique libre amorti.
a) justifier que l'équation différentielle du mouvement de l'oscillateur mécanique est alors

$$x^{\cdot\cdot} + \frac{f}{m} + \frac{k}{m} x = 0$$

b) Démontrer que l'équation horaire du mouvement de G est de la forme : $x(t) = \lambda e^{\alpha t} \cos(\omega t + \varphi)$
c) Calculer λ, α, ω, φ et la pseudo période T du mouvement, sachant que f = 0,2 N/ms–1.
d) Tracer la courbe représentative (Γ) de l'élongation du mouvement de G.

Exercice n°2

On considère un pendule élastique formé par un solide **(S)** de masse **m** et un ressort **(R)** à spires non jointives et de raideur **k**. Le pendule peut se déplacer sans frottement sur un plan horizontal. On note **x(t)** l'abscisse du centre d'inertie **G** du solide (**figure 1**).

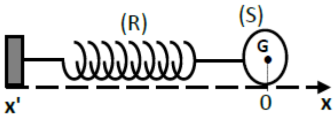


Figure 1

1/ Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit l'élongation **x(t)**.

2/ La courbe de figure **2** représente l'évolution de l'élongation en fonction du temps **x=f(t)**.

a- En exploitant cette courbe, écrire la loi horaire de l'élongation **x(t)**.

b- En déduire l'expression numérique de la vitesse instantanée **v(t)**.

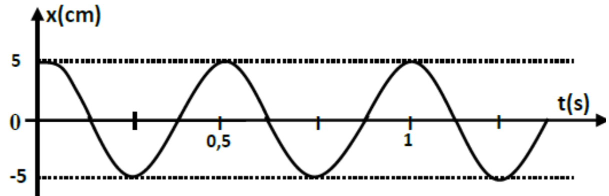


Figure 2

3/ Montrer que l'énergie mécanique **E** est constante au cours du temps.

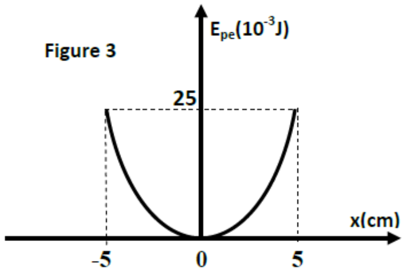
4/ La courbe de la **figure 3** représente l'énergie potentielle $\mathbf{E_{pe}}$ en fonction de l'élongation **x.**

a- Par exploitation de cette courbe, déterminer la valeur de **k.**

- **En** déduire la valeur de **m**.

c- Déterminer la valeur de la vitesse du solide à $\mathbf{v_1}$ lorsqu'il passe par la position d'abscisse $\mathbf{x_1 = 4}$ **cm** en se dirigeant vers le sens négatif.

Figure 3



5/ Maintenant, le solide **(S)** est soumis à des forces de frottement dont la résultante $\vec{f} = -h\vec{v}$ où **h** est une constante qui représente le coefficient de frottement.

a- L'équation différentielle du mouvement du solide (S) est : $\frac{d^2x}{dt^2} + 4,96\frac{dx}{dt} + 158,7x = 0.$

Déterminer la valeur de **h**.

b- La courbe d'évolution de l'élongation **x** en fonction du temps est représentée par la **figure** 4.

$\mathbf{b_1}$- Nommer le régime d'oscillation.

$\mathbf{b_2}$- Calculer la variation de l'énergie mécanique du pendule entre les instants $\mathbf{t_0}$**=0s** et $\mathbf{t_1}$**=1s**.

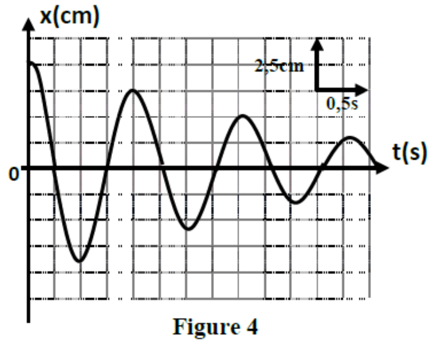
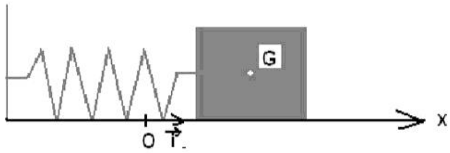


Figure 4

Exercice 3

Un oscillateur non amorti est constitué d'un mobile de masse m=220g accroché à un ressort idéal, horizontal, de constante de raideur k. Un logiciel permet d'enregistrer ls courbes ci-dessous. La trajectoire est portée sur un axe horizontal y'y.(= x'x sur le schéma)



1-La figure I représente la position y en fonction du temps t : (t,y).Déterminer graphiquement la période T des oscillations et l'élongation y_m de y.

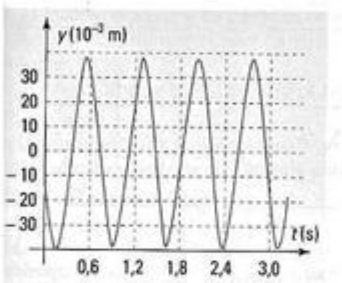


Figure I

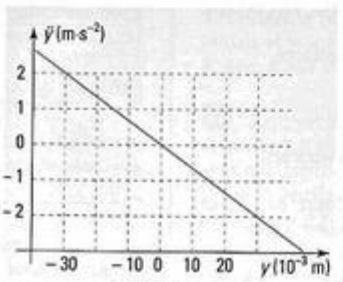


Figure II

$\ddot{y} = d^2y / dt^2$

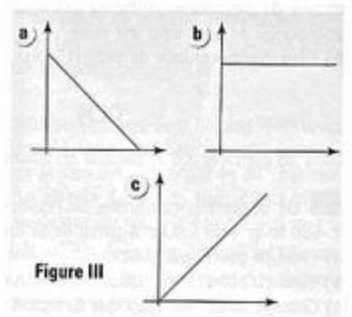


Figure III

2-Montrer que l'équation différentielle peut s'écrire sous la forme :

$$m. d^2y / dt^2 + k.y = 0$$

3-La figure II représente (y, d^2y/dt^2). Montrer que ce graphe est en accord avec l'équation différentielle vérifiée par y. Quelle valeur mesure-t-on avec le rapport k /m ?
4-Calculer la période propre T_0 de l'oscillateur. Cette valeur est-elle compatible avec T trouvée dans la question 1- ?
5-Donner l'expression de l'énergie mécanique E_m du système {ressort-mobile} en fonction de la position y et de la vitesse (y')= dy /dt du point G.
6-Pour traduire la conservation de l'énergie mécanique, on peut utiliser les représentations des couples (t,E_m) et (y^2,y'^2) . Indiquer les deux représentations qui conviennent parmi les trois proposées ci-dessous. Préciser les portées sur les axe